

Achamel.info

## تصحيح الدورة الإستدراكية 2011

تتمة حل التمرين رقم 1 :

$$J = \int_2^3 \frac{2}{x-1} dx - \int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$$

$$J = 2 \int_2^3 \frac{(x-1)'}{x-1} dx - \int_2^3 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx$$

$$J = 2 [\ln|x-1|]_2^3 - [\ln|x^2-x+1|]_2^3$$

$$J = 2 [\ln(2) - \ln(1)] - [\ln(7) - \ln(3)]$$

$$J = 2 \ln(2) - \ln\left(\frac{7}{3}\right)$$

$$J = \ln(4) - \ln\left(\frac{7}{3}\right) = \ln\left(\frac{12}{7}\right)$$

حل التمرين الثاني :

(1) لنحسب  $u_1$  و  $u_2$  لدينا  $u_0 = 2$ 

$$u_1 = \frac{3u_0 + 4}{u_0 + 6} = \frac{6 + 4}{2 + 6} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$u_2 = \frac{3u_1 + 4}{u_1 + 6} = \frac{3 \times \frac{5}{4} + 4}{\frac{5}{4} + 6} = \frac{\frac{15}{4} + 4}{\frac{5}{4} + 6} = \frac{\frac{15+16}{4}}{\frac{5+24}{4}} = \frac{31}{29}$$

(2) أ) لنبين بالترجع أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :

$$u_n > 1$$

• من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_0 = 2$  ومنه  $u_0 > 1$ .• نفترض أن  $u_n > 1$  ولنبين أن  $u_{n+1} > 1$ 

$$\text{لدينا } u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 4}{u_n + 6} - 1$$

حل التمرين الأول :

نعتبر الدالة العددية  $h$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $I = ]1; +\infty[$  بما يلي :

$$h(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

(1) نتحقق أن  $h(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}$  ( $\forall x \in I$ )  
لدينا لكل  $x$  من  $I$  :

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{2(x^2-x+1) - (2x-1)(x-1)}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 2 - (2x^2 - 2x - x + 1)}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 2 - 2x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

$$= h(x)$$

(2) استنتاج حساب التكامل  $J = \int_2^3 h(x) dx$ نعلم أن :  $h(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}$  ( $\forall x \in I$ )

$$J = \int_2^3 h(x) dx = \int_2^3 \left( \frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) dx \quad \text{ومنه}$$

## تتمة حل التمرين رقم 2 :

لدينا:  $v_n = \frac{u_n + 4}{u_n - 1}$  إذن  $v_n - 1 = \frac{u_n + 4}{u_n - 1} - 1$

أي  $v_n - 1 = \frac{u_n + 4 - (u_n - 1)}{u_n - 1}$  أي  $v_n - 1 = \frac{5}{u_n - 1}$

بما أن  $u_n > 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ );

فإن  $u_n - 1 > 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ );

وبالتالي:  $v_n > 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ );

(ب) لنبين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ :  $u_n = \frac{v_n + 4}{v_n - 1}$

لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  لدينا:  $v_n = \frac{u_n + 4}{u_n - 1}$

إذن  $v_n(u_n - 1) = u_n + 4$

أي:  $v_n u_n - v_n = u_n + 4$

أي:  $v_n u_n - u_n = v_n + 4$

أي:  $u_n(v_n - 1) = v_n + 4$  أي:  $u_n = \frac{v_n + 4}{v_n - 1}$

(ج) لنبين أن المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية

لدينا  $\forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 4}{u_{n+1} - 1}$

إذن:  $v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n + 4}{u_n + 6} + 4}{\frac{3u_n + 4}{u_n + 6} - 1} = \frac{3u_n + 4 + 4(u_n + 6)}{3u_n + 4 - (u_n + 6)}$

$= \frac{3u_n + 4 + 4u_n + 24}{3u_n + 4 - u_n - 6} = \frac{7u_n + 28}{2u_n - 2} = \frac{7(u_n + 4)}{2(u_n - 1)}$

$= \frac{7u_n + 28}{2u_n - 2} = \frac{7(u_n + 4)}{2(u_n - 1)} = \frac{7}{2} \left( \frac{u_n + 4}{u_n - 1} \right)$

أي أن:  $v_{n+1} = \frac{7}{2} v_n$

## تتمة حل التمرين رقم 2 :

وبالتالي  $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 4 - (u_n - 1)}{u_n + 6}$

$= \frac{2u_n - 2}{u_n + 6}$

$u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 6}$

لدينا  $u_n > 1$  ومنه  $u_n - 1 > 0$  و  $u_n + 6 > 7 > 0$

إذن  $u_{n+1} > 1$ ، وبالتالي:  $u_n > 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ );

(ب) لنبين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تناقصية، واستنتج أنها متقاربة.

$u_{n+1} - u_n = \frac{(3u_n + 4) - u_n(u_n + 6)}{u_n + 6}$

$= \frac{3u_n + 4 - u_n^2 - 6u_n}{u_n + 6}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 - 3u_n + 4}{u_n + 6}$

بما أن  $u_n + 6 > 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ );

فإن إشارة  $u_{n+1} - u_n$  هي إشارة  $-u_n^2 - 3u_n + 4$

$\left( \begin{array}{l} -X^2 - 3X + 4 = 0 \\ X = U_n \end{array} \right) \Delta = 9 + 16 = 25 > 0$

هناك حلان هما: 1 و -4

| $u_n$               | $-\infty$ | -4 | 1 | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|----|---|-----------|
| $-u_n^2 - 3u_n + 4$ |           | -  | + | -         |

بما أن  $u_n > 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ );

$(\forall n \in \mathbb{N}); -u_n^2 - 3u_n + 4 < 0$

أي:  $u_{n+1} - u_n < 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ );

ومنه:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تناقصية.

بما أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تناقصية ومصغرة بالعدد 1 فإنها

متقاربة.

(3) أ) احسب  $v_n - 1$  بدلالة  $u_n$ .

## تتمة حل التمرين رقم 3 :

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{(1 + e^x)'}{(1 + e^x)} \quad \text{ومنه فإن}$$

$$= \frac{e^x e^x + e^x - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$g'(x) = \frac{e^x - e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \quad \text{أي أن}$$

(2) أ) أحسب  $g(0)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

$$g(0) = \frac{1}{1+1} - \ln(1+1) \quad (e^0 = 1)$$

$$g(0) = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x)$$

$$= \frac{0}{0+1} - \ln(1+0) = 0$$

لأن:  $\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \right)$

(ب) جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$$\forall x \in I \quad g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2} : \text{بما أن}$$

$$(\forall x \in I) \quad (e^x + 1)^2 > 0 \text{ و } e^{2x} > 0$$

$$(\forall x \in I) \quad g'(x) < 0$$

إذن  $g$  تناقصية قطعاً على  $I$ .

جدول تغيرات الدالة  $g$ .

|         |           |                       |
|---------|-----------|-----------------------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$                   |
| $g'(x)$ |           | -                     |
| $g(x)$  | $0$       | $\frac{1}{2} - \ln 2$ |

## تتمة حل التمرين رقم 2 :

ومنه فإن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{7}{2}$

$$(U_0 = 2) \quad v_0 = \frac{u_0 + 4}{u_0 - 1} = 6$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = v_0 q^n \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = 6 \left( \frac{7}{2} \right)^n$$

(د) أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = \frac{v_n + 4}{v_n - 1} \quad \text{نعلم أن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = \frac{6 \left( \frac{7}{2} \right)^n + 4}{6 \left( \frac{7}{2} \right)^n - 1} \quad \text{ومنه فإن :}$$

(هـ) أحسب نهاية  $u_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \left( \frac{7}{2} \right)^n + 4}{6 \left( \frac{7}{2} \right)^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{7}{2} \right)^n \left( 6 + 4 \left( \frac{2}{7} \right)^n \right)}{\left( \frac{7}{2} \right)^n \left( 6 - \left( \frac{2}{7} \right)^n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 4 \left( \frac{2}{7} \right)^n}{6 - \left( \frac{2}{7} \right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{7} \right)^n = 0 : \text{فإن } -1 < \frac{2}{7} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{إذن :}$$

## حل التمرين الثالث :

الجزء الأول :

$$\forall x \in I \quad g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \quad (1) \text{ لنبين أن :}$$

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x) : I \text{ لدينا لكل } x$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

لدينا:  $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$  وحيث أن:  $e^0 = 1$

فإن  $g'(0) = \frac{-e^{2 \times 0}}{(e^0 + 1)^2} = \frac{-1}{4}$

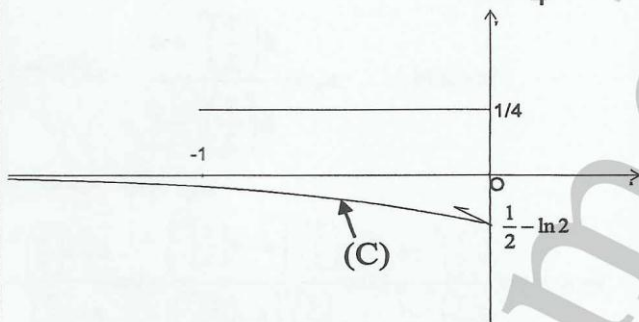
ن إنشاء (C)

● منحنى الدالة  $g$  يقبل مقاربا افقيا معادلته  $y = 0$

بجوار  $+\infty$

● (C) يقبل مماسا في النقطة التي أفصولها 0 معامله

الموجه  $-\frac{1}{4}$



الجزء الثاني :

(1) لنبين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

نضع:  $t = e^x$  ومنه:  $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

إذن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x}$

$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$

(2) احسب  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $I$

واستنتج أن:  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$   $\forall x \in I$

لدينا:  $f(x) = \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x}$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

(3) استنتاج : لدينا  $g([- \infty; 0]) = [\frac{1}{2} - \ln 2; 0]$

ومنه فإن:  $(\forall x \in I) g(x) < 0$

(4) أ) حساب  $g''(x)$

لدينا:  $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$

إذن:  $g''(x) = (g'(x))' = \left( \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \right)'$

$g''(x) = -\frac{2e^{2x}(e^x + 1)^2 - 2e^{2x}e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4}$

$g''(x) = -\frac{2e^{2x}(e^x + 1)(e^x + 1 - e^x)}{(e^x + 1)^4}$

$g''(x) = -\frac{2e^{2x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4}$

$g''(x) = -\frac{2e^{2x}}{(e^x + 1)^3}$

ن استنتاج التوقع

وحيث أن:  $2e^{2x} > 0$  و  $(e^x + 1)^3 > 0$  ;  $(\forall x \in I)$

فإن:  $-\frac{2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} < 0$

ومنه فإن:  $(\forall x \in I) g''(x) < 0$

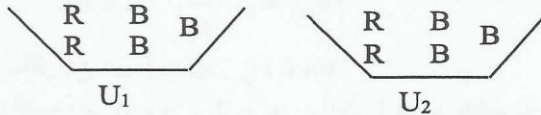
وبالتالي فإن تقع منحنى  $g$  (موجه نحو الأرتيب السالبة).

ب) حساب  $g'(0)$

تممة حل التمرين رقم 3 :

استنتاج: لدينا :  $f(-\infty; 0] = [\ln 2; 1[$   
 ومنه  $(\forall x \in ]-\infty; 0]); f(x) \in [\ln 2; 1[$   
 إذن:  $(\forall x \in ]-\infty; 0]); \ln 2 \leq f(x) < 1$

حل التمرين الرابع:



ليكن  $\Omega$  كون الإمكانات لدينا:  $card\Omega = C_5^1 \times C_5^1 = 25$   
 (1) احتمال الحدث B: يتحقق الحدث B بالحصول على كرة حمراء والحصول على كرة كيفما كان لونها من  $U_2$

ومنه:  $cardB = C_2^1 \times C_5^1 = 10$

إذن:  $p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

• لنبين أن  $p(A) = \frac{12}{25}$

يتحقق الحدث A بالحصول على كرة حمراء من  $U_1$  والحصول على كرة حمراء من  $U_2$  أو كرة بيضاء من  $U_1$  وكرة بيضاء من  $U_2$ .

$A = \{RR; BB\}$

$cardA = C_2^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_2^1 = 6 + 6 = 12$

ومنه:  $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{12}{25}$

(2) هذا احتمال شرطي:

لدينا  $p_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  ولدينا  $A \cap B = \{RR\}$

إذن  $card(A \cap B) = C_2^1 \times C_3^1 = 6$

أي:  $P(A \cap B) = \frac{6}{25}$

ومنه  $p_B(A) = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

تممة حل التمرين رقم 3 :

ومنه  $\forall x \in I; f'(x) = \frac{\frac{e^x}{e^x+1} e^x - e^x \ln(e^x+1)}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{\frac{e^{2x}}{e^x+1} - e^x \ln(e^x+1)}{e^{2x}}$

$= \frac{e^x \left( \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1) \right)}{e^{2x}}$

$= \frac{\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)}{e^x}$

وبما أن:  $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x)$

فإن:  $\forall x \in \mathbb{N}; f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

(ب) احسب  $f(0)$  وضع جدول تغيرات الدالة  $f$  ثم

استنتج أن:  $\forall x \leq 0; \ln 2 \leq f'(x) \leq 1$

• لدينا  $f(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$

إذن  $f(0) = \frac{\ln(e^0+1)}{e^0} = \ln 2$

• لدينا  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

وبما أن  $(\forall x \in I); g(x) < 0$  و  $(\forall x \in I); e^x > 0$

فإن:  $\forall x \in I; f'(x) < 0$  إذن  $f$  تناقصية على  $I$

ومنه جدول تغيرات  $f$  هو:

|         |           |         |
|---------|-----------|---------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$     |
| $f'(x)$ | $-$       |         |
| $f(x)$  | $1$       | $\ln 2$ |