

—

$$f(x) = 6x^{\frac{2}{3}} - 4x \quad ; \quad x \in [0, +\infty[$$

(1) * لدينا

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{6x^{\frac{2}{3}} - 4x}{x} \\ &= \frac{6x^{\frac{2}{3}}}{x} - 4 \\ &= \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt[3]{x} = 0, \quad \sqrt[3]{x} > 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{6}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad * \text{ بما أن }$$

فإن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر وبالتالي فإن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} \left(6 - 4x^{\frac{1}{3}} \right) \\ &= +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{aligned} \quad * (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{3\sqrt[3]{x}} - 4 \right) = -4 \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^{\frac{2}{3}} = +\infty \quad *$$

إذن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه هو اتجاه المستقيم الذي معادلته $y = -4x$.

$$\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = 6 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} - 4$$

$$= 4x^{-\frac{1}{3}} - 4$$

$$= 4 \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - 1 \right)$$

$$f'(x) = \frac{4(1 - 3\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}} \quad \text{إذن}$$

* لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1 - 3\sqrt[3]{x}$.

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = 1 \\ f'(x) > 0 & \Leftrightarrow & 0 < x < 1 \\ f'(x) < 0 & \Leftrightarrow & x > 1 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

جدول تغيرات f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	—
$f(x)$	0	2	$-\infty$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} \left(6 - 4x^{\frac{1}{3}} \right) = 0 \quad \text{أ. 4}$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 0 \quad \text{أو} \quad 6 - 4x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{أو} \quad x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

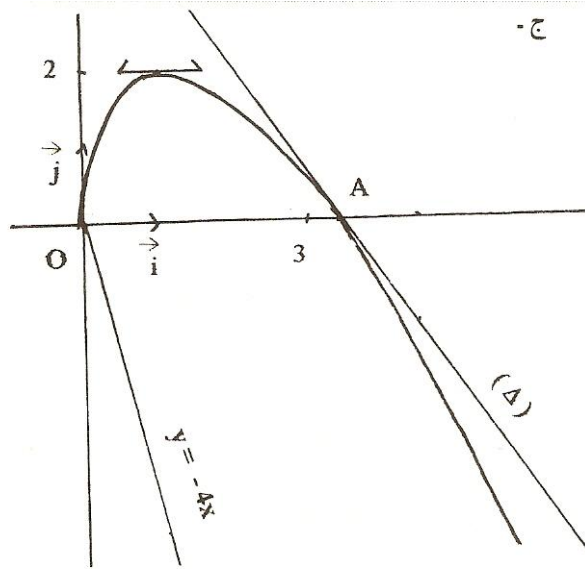
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{27}{8}$$

إذن نقطتي تقاطع المنحنى (C) ومحور الأفاسيل هما

$$A\left(\frac{27}{8}, 0\right) \quad \text{و} \quad O(0, 0)$$

$$\text{ب. لدينا : } f\left(\frac{27}{8}\right) = 0 \quad \text{و} \quad f\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{4\left(1 - \frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{إذن } y = -\frac{4}{3}x + \frac{9}{2} \quad \text{هي معادلة المماس } (\Delta).$$



(5) g قصور الدالة f على المجال $I = [1, +\infty[$.
 * من خلال دراسة الدالة f ، g دالة متصلة وتناقصية قطعاً على
 المجال I و $g(I) =]-\infty, 2]$.
 إذن g تقابل من I نحو $]-\infty, 2]$.

* نعلم أن $f\left(\frac{27}{8}\right) = 0$ و $\frac{27}{8} \in I$

إذن $g^{-1}(0) = \frac{27}{8}$

ومنه فإن $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'\left(\frac{27}{8}\right)} = -\frac{3}{4}$ لأن $f'\left(\frac{27}{8}\right) = -\frac{4}{3}$