

$$f(x) = x - 2 + \sqrt[3]{x^2 + 1} ; x \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 1} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{أ. 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 2 + \sqrt[3]{x^2 + 1}}{x} \right) \quad \text{ب. *}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{x^3}} \right)$$

$$= 1$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{لأن} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + \sqrt[3]{x^2 + 1}) = +\infty \quad *$$

إذن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه هو اتجاه المستقيم الذي معادلته $y = x$.

$$\forall x \in [0, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \quad \text{أ. 2}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[; f'(x) = \frac{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} + 2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}} \quad \text{إذن}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} > 0 \quad , \quad 2x \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

جدول تغيرات f :

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	-1	$+\infty$

(3) بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

و $f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$

فإن f تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $[-1, +\infty[$.

(4) أ. * بما أن f تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $[-1, +\infty[$ و $0 \in [-1, +\infty[$ فإنه يوجد α وحيد من $[0, +\infty[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

لدينا $f(1) = \sqrt[3]{2} - 1 > 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \frac{3}{2} < 0$

إذن $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$

ومنه فإن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

الخلاصة :

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

ب.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + 1} = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$$

إذن المنحنى (e) يقطع المستقيم $y = x$ (Δ) في النقطة $A(\sqrt{7}, \sqrt{7})$

ج.

