

$$f(x) = \frac{1}{2} (x + 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 9})$$

(1) * بما أن $x^2 - 2x + 9 = (x - 1)^2 + 8$ لكل $x \in \mathbb{R}$
 فإن $x^2 - 2x + 9 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$
 وبالتالي فإن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 2x + 9} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} ; f(x) &= \frac{1}{2} \frac{(x + 3)^2 - (x^2 - 2x + 9)}{x + 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}} \quad * (2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{8x}{x + 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8x}{x \left(1 + \frac{3}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{1 + \frac{3}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{1 + \frac{3}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}}} = \frac{8}{2(1+1)} = 2$$

$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2}$ إذن

* بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

$$\begin{aligned} (3) \text{ لدينا } f(x) - (x + 1) &= \frac{1}{2} (x + 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 9}) - (x + 1) \\ &= \frac{1}{2} (-x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x + 9}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-x + 1)^2 - (x^2 - 2x + 9)}{-x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-8}{-x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}} \\ &= \frac{-4}{-x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 9} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{-x+1 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) = 0}$$

إذن المستقيم (D) : $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.
(4) أ. * بما أن $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 - 2x + 9 > 0$

فإن الدالة $x \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 9}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
* الدالة $x \rightarrow x + 3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
الخلاصة : f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 9}} \right) \quad \text{ب.}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 9}} \right)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 9} - x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 9}} \right)} \quad \text{إذن}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; (x-1)^2 + 8 > (x-1)^2 \quad \text{بما أن}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \sqrt{x^2 - 2x + 9} > |x-1| \geq x-1 \quad \text{فإن}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \sqrt{x^2 - 2x + 9} - (x-1) > 0 \quad \text{ومنه فإن}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) > 0} \quad \text{وبالتالي فإن}$$

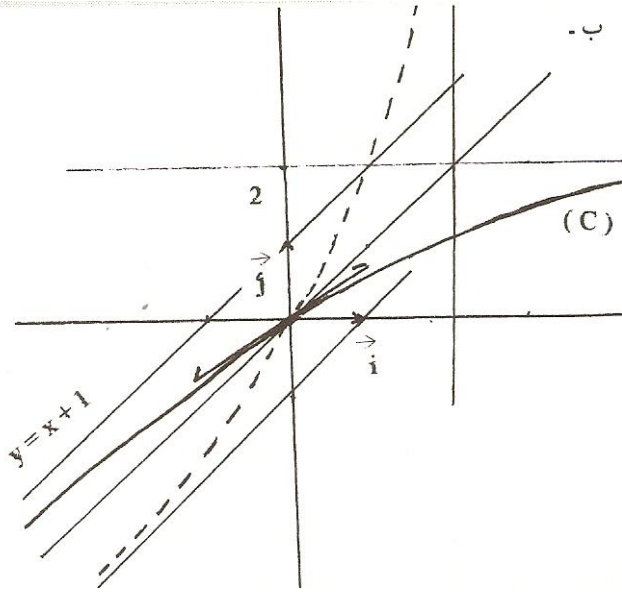
إذن الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.

ج. جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	2

$$(5) \quad \text{أ. لدينا } f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f'(0) = \frac{2}{3}$$

إذن $y = \frac{2}{3}x$ هي معادلة المماس (T).



6 أ - بما أن دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 2[$ إذن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $] -\infty, 2[$.
 ب - نعلم أن f و f^{-1} لهما نفس منحنى التغير.
 إذن :

x	$-\infty$	2
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ج - بما أن $f(0) = 0$ و $f'(0) = \frac{2}{3}$

فإن $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$

أي $(f^{-1})'(0) = \frac{3}{2}$