

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-2}, & x \geq 2 \\ f(x) = \frac{x}{3-x}, & x < 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2 - \sqrt{2-2} = 2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x - \sqrt{x-2}) = 2 = f(2) \quad \bullet$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x}{3-x} = \frac{2}{3-2} = 2 = f(2) \quad \bullet$$

إذن f دالة متصلة في النقطة $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3-x} = -1 \quad * (2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{x-2}{x^2}} \right) \\ &= +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty \end{aligned} \quad *$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{\frac{x}{3-x} - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{3(x-2)}{(3-x)(x-2)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{3}{3-x} = 3 \end{aligned} \quad * (3)$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0 = 2$ و $f'_g(2) = 3$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x - 2 - \sqrt{x-2}}{x - 2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{x-2}} \right) \\ &= -\infty \end{aligned} \quad *$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0 = 2$.
ومنه فإن المنحنى (C) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأرتيب في النقطة $x_0 = 2$ على اليمين.

$$\forall x \in]-\infty, 2[; f'(x) = \frac{3}{(3-x)^2} \quad * \text{ أ. (4)}$$

$$\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \quad *$$

$$= \frac{2\sqrt{x-2} - 1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = \frac{2\sqrt{x-2} - 1}{2\sqrt{x-2}} \quad \text{إذن}$$

ب. *

$$\forall x \in]-\infty, 2[; (3-x)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty, 2[; f'(x) > 0$$

* إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2\sqrt{x-2} - 1$ على $]2, +\infty[$

$$2\sqrt{x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{9}{4}}$$

$$2(\sqrt{x-2} - 1) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$$

$$\left[\frac{9}{4}, +\infty \right[\text{ موجب على المجال } f'(x) \text{ إذن}$$

$$\text{و } f'(x) \text{ سالبة على المجال } \left] 2, \frac{9}{4} \right]$$

ج. * بما أن $f'(x)$ موجبة على كل من المجالين

$$]-\infty, 2[\text{ , } \left[\frac{9}{4}, +\infty \right[\text{ فإن } f \text{ تزايدية على كل من المجالين}$$

$$]-\infty, 2[\text{ , } \left[\frac{9}{4}, +\infty \right[.$$

$$* \text{ بما أن } f'(x) \text{ سالبة على المجال } \left] 2, \frac{9}{4} \right] .$$

$$\text{فإن } f \text{ تناقصية على المجال } \left] 2, \frac{9}{4} \right] .$$

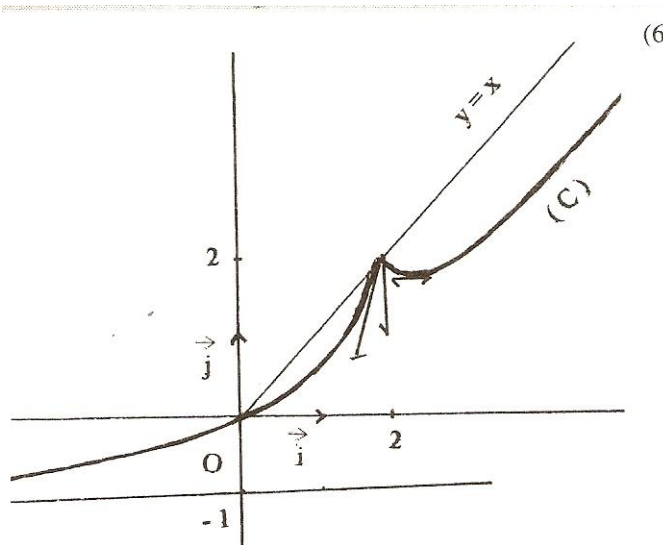
د. جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	2	$\frac{9}{4}$	$+\infty$
f'(x)	+	$-\infty$	0	+
f(x)	-1	2	$\frac{7}{4}$	$+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt{\frac{x-2}{x^2}} \right) \quad * (5) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x-2}) = -\infty$$

إذن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه هو اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$.



(7) g قصور f على المجال $I = \left[2, \frac{9}{4} \right]$

أ. من خلال دراسة الدالة f، g دالة متصلة وتناقصية قطعاً على

المجال I و $g(I) = \left[\frac{7}{4}, 2 \right]$.

إذن g تقابل من $I = \left[2, \frac{9}{4} \right]$ نحو $J = \left[\frac{7}{4}, 2 \right]$

ب. $g^{-1} : \left[\frac{7}{4}, 2 \right] \longrightarrow \left[2, \frac{9}{4} \right]$

$$x \longrightarrow y = g^{-1}(x)$$

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = y - \sqrt{y-2}$$

$$\Leftrightarrow x = (\sqrt{y-2})^2 - \sqrt{y-2} + 2$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\sqrt{y-2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-2} - \frac{1}{2} \right)^2 = x - \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-2} - \frac{1}{2} = -\sqrt{x - \frac{7}{4}} \quad \left(\sqrt{y-2} \leq \frac{1}{2} \text{ لأن } \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-2} = \frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{7}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{7}{4}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{7}{4}} \right)^2$$

$$\boxed{\forall x \in J ; g^{-1}(x) = 2 + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{7}{4}} \right)^2}$$

إذن