

$$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{1-x} + x - 4 & ; x < 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(0) = \sqrt[3]{0} = 0 \quad \bullet \text{ أ. لدينا}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} = 0 = f(0) \quad \bullet$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (4\sqrt{1-x} + x - 4) = 4 - 4 = 0 = f(0) \quad \bullet$$

إذن f دالة متصلة في الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet \text{ أ. (2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

ب. لدينا

$$\forall x \in]-\infty, 0[; f(x) = 4\sqrt{1-x} - (1-x) - 3$$

$$= \sqrt{1-x} (4 - \sqrt{1-x}) - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} (4 - \sqrt{1-x}) = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\sqrt{1-x} + x - 4}{x} \quad \bullet \text{ أ. (3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-4\sqrt{\frac{1-x}{x^2}} + 1 - \frac{4}{x} \right)$$

$$= 1$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^2} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \text{لأن} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4\sqrt{1-x} - 4) = +\infty$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y = x$ اتجاه مقارب للمنحنى (ع) بجوار $-\infty$.

- ب

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]0, +\infty[; f(x) - (x+1) &= \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - (x+1) \\
 &= \frac{(x^3 + 3x^2) - (x+1)^3}{(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} + x^2} \\
 &= \frac{-3x - 1}{\left(x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}}\right)^2 + x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + x^2} \\
 &= \frac{x \left(-3 - \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right]} \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \frac{-3 - \frac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-3 - \frac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + 1} &= 0 \cdot \frac{-3+0}{1+1+1} = 0 \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] &= 0
 \end{aligned}$$

إذن المستقيم $y = x + 1$: Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ج - لدينا :

$$\forall x \in]0, +\infty[; f(x) - (x+1) = \frac{-3x - 1}{(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} + x^2}$$

بما أن $-3x - 1 < 0$ و $(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} + x^2 > 0$

لكل x من $]0, +\infty[$ فإن $\boxed{\forall x > 0 ; f(x) - (x+1) < 0}$

ومنه فإن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم Δ عندما يكون $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}{x} \quad * (4) \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 3x^2}{x^3}} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} \\
 &= +\infty \quad \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{3}{x} = +\infty \text{ لأن} \right)
 \end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر. *

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{4\sqrt{1-x} + x - 4}{x} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{(4\sqrt{1-x})^2 - (x-4)^2}{x[4\sqrt{1-x} - (x-4)]} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{16(1-x) - (x^2 - 8x + 16)}{x(4\sqrt{1-x} + 4 - x)} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-8x - x^2}{x(4\sqrt{1-x} + 4 - x)} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-8 - x}{4\sqrt{1-x} + 4 - x} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار في الصفر.

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[; f'(x) &= \frac{(x^3 + 3x^2)'}{3 \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^2}} \\ &= \frac{3x^2 + 6x}{3 \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^2}} \end{aligned} \quad * (5)$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^2}}} \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, 0[; f'(x) &= 4 \cdot \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} + 1 \\ &= 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x}} + 1 \end{aligned} \quad *$$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0[; f'(x) = \frac{-2 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}} \quad \text{إذن}$$

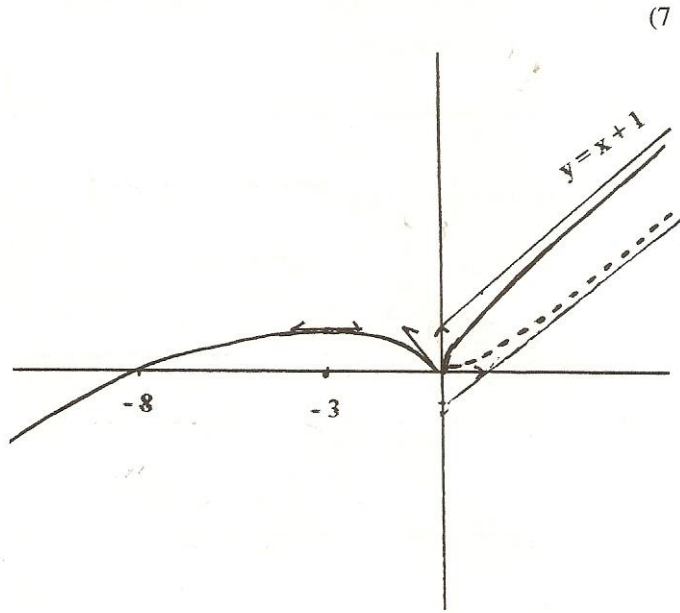
* (6)

$$\forall x \in]0, +\infty[; x^2 + 2x > 0 \Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[; f'(x) > 0$$

*

$$\begin{aligned} \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = +2 \\ x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 4 \\ x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \\ \begin{cases} f'(x) > 0 \\ x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow -2 + \sqrt{1-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-x} > 2 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)	$-\infty$	1	0	$+\infty$



- (8) g قصور الدالة f على $[0, +\infty[$.
أ. من خلال دراسة الدالة f , g دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$ و $g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.
إذن g تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $[0, +\infty[$.
ب. منحنى g^{-1} مرسوم بخط متقطع.