

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \sqrt{x+2} \quad ; \quad x \geq -2 \quad (I)$$

$$f(-2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = -1 \quad * (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \quad *$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + 1 + \sqrt{x+2}}{x + 2} \quad . \hat{1} (2) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{\frac{1}{4}(x+2) + \sqrt{x+2}}{x+2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{x+2}{(x+2)^2}} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{x+2}} \right) = +\infty \end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في -2 .

$$ب. \quad \forall x \in]-2, +\infty[\quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على $]-2, +\infty[$.

ج. بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $]-2, +\infty[$

$$و \quad f(]-2, +\infty[) = [f(-2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [= [-1, +\infty[$$

فإن f تقابل من $]-2, +\infty[$ نحو $[-1, +\infty[$ ومنه فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $[-1, +\infty[$.

د. بما أن f دالة تزايدية على $]-2, +\infty[$.

$$\text{فإن : } f([0, 2]) = [f(0), f(2)]$$

$$\text{لدينا } f(2) = 2 \quad , \quad f(0) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن } f([0, 2]) = \left[\sqrt{2} - \frac{1}{2}, 2 \right]$$

$$\sqrt{2} - \frac{1}{2} > 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$\left[\sqrt{2} - \frac{1}{2}, 2 \right] \subset [0, 2] \quad \text{فإن}$$

$$\boxed{f([0, 2]) \subset [0, 2]} \quad \text{أي}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \sqrt{x+2} = x \quad * \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{2+3x}{4} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 & , & 2+3x \geq 0 \\ x+2 = \left(\frac{2+3x}{4}\right)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x+2 = \frac{4+12x+9x^2}{16} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ 9x^2 - 4x - 28 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x = 2 \quad \text{أو} \quad x = -\frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = 2}
 \end{aligned}$$

إذن 2 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$ في $\mathbb{R}$.

$$(3) \text{ أ. • لنحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{لدينا :} \quad \forall x \in]0, +\infty[; \frac{f(x)}{x} &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \sqrt{x+2}}{x} \\
 &= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{x+2}{x^2}}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}}$$

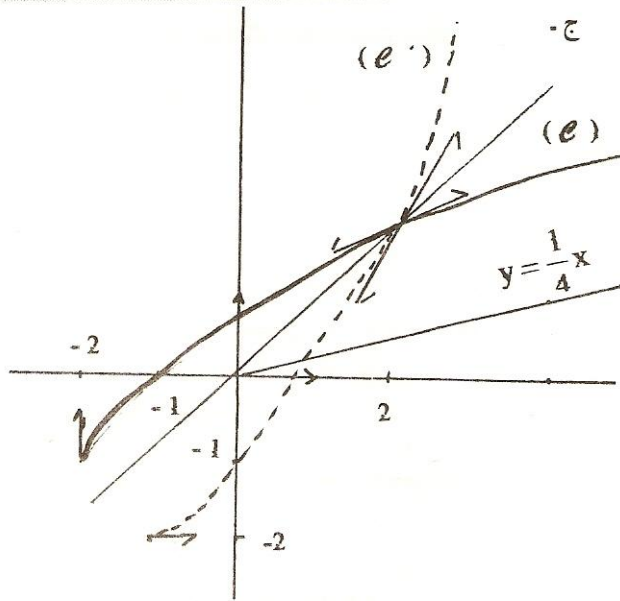
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{4}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x+2} \right) \quad \bullet$$

إذن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه هو اتجاه المستقيم الذي

$$\text{معادلته } y = \frac{1}{4}x.$$

$$\text{ب. • لدينا : } f'(2) = \frac{1}{2}$$

إذن $\frac{1}{2}$ هو المعادل الموجه لمماس (C) و 2 هو المعامل الموجه لمماس (C') في النقطة ذات الأفصول 2.



$$u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad u_0 = 0$$

(1) لدينا $u_0 = 0$ إذن $0 \leq u_0 \leq 2$ نفترض أن $0 \leq u_p \leq 2$

$$\begin{cases} 0 \leq u_p \leq 2 \\ f([0, 2]) \subset [0, 2] \end{cases} \Rightarrow f(u_p) \in [0, 2] \Rightarrow 0 \leq u_{p+1} \leq 2$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2} \quad \text{إذن}$$

$$(2) \text{ لدينا } u_0 = 0 \text{ و } u_1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \text{ إذن } u_1 \geq u_0$$

$$\text{نفترض أن } (p \in \mathbb{N}^* \text{ مع } u_{p-1} < u_p)$$

$$\begin{cases} u_{p-1} < u_p \\ f \text{ تزايدية} \end{cases} \Rightarrow f(u_{p-1}) \leq f(u_p) \Rightarrow u_p \leq u_{p+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_{n+1}} \quad \text{إذن}$$

ومنه فإن المتتالية (u_n) تزايدية.

(3) * بما أن المتتالية (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 2 فإنها متقاربة.

* بما أن f دالة متصلة على المجال $[0, 2]$ و $f([0, 2]) \subset [0, 2]$

و (u_n) متقاربة فإن ℓ نهاية (u_n) تحقق العلاقة $f(\ell) = \ell$

ومن خلال السؤال (2) د - فإن $\ell = 2$

إذن :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$