

تمرين 2

1. $z^2 - 6z + 25 = 0$
 $= 36 - 100 = -64$
 $z_1 = \frac{6 - i\sqrt{64}}{2} \quad z_2 = \frac{6 + i\sqrt{64}}{2}$
 $z_1 = 3 - 4i \quad z_2 = 3 + 4i$
 $S = \{3 - 4i, 3 + 4i\}$
 2. أ - $\frac{d-c}{a-c} = \frac{5+6i-2-3i}{3+4i-2-3i} = \frac{3(1+i)}{1+i} = 3$
 ب - $\frac{d-c}{a-c} \in \mathbb{R}$ إذن النقط A و C و D مستقيمة.
 $h(A) = P - b$
 ج - $p - b = \frac{3}{2}(a - b)$ إذن : p لحق النقطة P .
 أي : $p = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b$
 أي : $p = \frac{9}{2} + 6i - \frac{3}{2} + 2i = 3 + 8i$
 $\frac{d-p}{a-p} = \frac{5+6i-3-8i}{3+4i-3-8i} = \frac{2-2i}{-4i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
 $\left| \frac{d-p}{a-p} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\frac{d-p}{a-p} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4} \right)$
 $(\overline{PA}, \overline{PD}) = \arg \left(\frac{d-p}{a-p} \right) [2p]$
 $\frac{p}{4}$ قياس للزاوية $(\overline{PA}, \overline{PD})$
 لدينا $\left| \frac{d-p}{a-p} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 إذن : $\left| \frac{d-p}{a-p} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أي : $\frac{PD}{PA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 إذن : $PA = \sqrt{2}PD$

تمرين 1

1. أ - (S) فلكة مركزها $(1; 0; 1)$ وشعاعها $R = 3$
 إذن : $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$
 أي : $x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 - 9 = 0$
 أي : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ معادلة ديكارتية للفلكة (S) .
 لدينا : $A(2, 2, -1)$
 $2^2 + 2^2 + (-1)^2 - 2 \times 2 - 2 \times (-1) - 7 = 9 - 4 + 2 - 7 = 0$
 إذن $A \in (S)$
 ب - $d(\Omega, (P)) = \frac{|2+0+2-13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{9}{3} = 3$
 $d(\Omega, (P)) = R$
 إذن (P) مماس لـ (S) .
 2. أ - $(P) : 2x + y + 2z - 13 = 0$
 $\vec{u}(2, 1, 2)$ متجهة منظمية على (P) .
 لدينا $(D) \perp (P)$
 إذن $\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) .
 $\overrightarrow{\Omega A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{A \wedge \vec{u}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$
 $= 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$
 إذن $(6; -6; -3)$ هو متلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{A \wedge \vec{u}}$
 ب - $\frac{\|\overrightarrow{\Omega A \wedge \vec{u}}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{36+36+9}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$
 لدينا : $d(\Omega, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A \wedge \vec{u}}\|}{\|\vec{u}\|} = R$
 إذن (D) مماس لـ (S) .
 $A \in (D)$ و $A \in (S)$
 إذن A هي نقطة تماس (D) و (S) .

$$v_{n+1} = \frac{-5+10u_n}{-6+6u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{5(2u_n-1)}{6(u_n-1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n$$

إذن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$ وحدها الأول $v_0 = 1$

حيث : $v_0 = \frac{2u_0-1}{u_0-1}$

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

ب - لدينا $v_n = \frac{2u_n-1}{u_n-1}$ إذن $v_n u_n - v_n = 2u_n - 1$

$$u_n(v_n - 2) = v_n - 1$$

$$u_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0 \text{ إذن } -1 < \frac{5}{6} < 1$$

تمرين 5

1. $2x(x^2-1)^{2009} = (x^2-1)'(x^2-1)^{2009}$

إذن الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$x \mapsto \frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010} + c$$

حيث c عدد حقيقي.

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009} dx = \left[\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2010} - 0 = \frac{1}{2010}$$

2. نضع : $I = \int_0^2 (2x+1) \ln(x+1) dx$

نأخذ : $u(x) = x^2 + x$: $u'(x) = 2x+1$

إذن : $v(x) = \ln(x+1)$: $v'(x) = \frac{1}{x+1}$

$$I = \left[(x^2+x) \ln(x+1) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x(x+1)}{x+1} dx$$

$$I = \left[(x^2+x) \ln(x+1) \right]_0^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2$$

$$I = 6 \ln 3 - 0 - (2 - 0)$$

$$I = 6 \ln 3 - 2$$

تمرين 3

1. القيم التي تأخذها X هي : $0 : 1 : 2$.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Card } A_9^2 = 72$$

$(X=0)$: «الكرتان المسحوبتان لونهما أبيض».

$$p(X=0) = \frac{A_2^2}{A_9^2} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

$(X=1)$: «كرة واحدة بالضبط لونها أبيض».

$$p(X=1) = \frac{2!}{A_9^2} \frac{A_2^1 A_7^1}{72} = \frac{2 \times 2 \times 7}{72} = \frac{7}{18}$$

$(X=2)$: «الكرتان المسحوبتان لونهما أسود».

$$p(X=2) = \frac{A_7^2}{A_9^2} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$$

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{12}$

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{36} + 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{7}{12}$$

$$E(x) = \frac{14}{9}$$

تمرين 4

1. • ليكن n من $\mathbb{N}$:

$$1 - U_{n+1} = \frac{1+4u_n}{7-2u_n} = \frac{7-2u_n-1-4u_n}{7-2u_n}$$

$$= \frac{6-6u_n}{5+2-2u_n}$$

$$= \frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$$

• من أجل $n=0$ لدينا $U_0=0$ إذن $1-U_0>0$

نفترض أن $1-U_n>0$ من أجل n صحيح طبيعي ثابت

ولنبين أن $1-U_{n+1}>0$

$$1 - u_{n+1} = \frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$$

لدينا $1-U_n>0$ إذن $6(1-U_n)>0$ و $5+2(1-U_n)>0$

إذن $1-U_{n+1}>0$

ومنه : $1-U_n>0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

2. أ - ليكن n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1} = \frac{1+4u_n-1}{7-2u_n-1}$$

تمارين 6

1. أ - ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) = x \left(\frac{e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}} \right)}{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}} \right)} \right)$$

$$f(n) = x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)$$

ب - لكل x من $\mathbb{R}$: $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = x \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = f(x)$$

إذن f دالة زوجية.

• لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) - x = \frac{(1 - e^{-2x})}{1 + e^{-2x}} - x = \frac{x - xe^{-2x} - x - xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right) = +\infty \quad \text{ج -}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \quad \text{إذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} t e^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

2. ليكن x من $[0, +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$-2x \leq 0 \quad \text{و} \quad 1 + e^{-2x} > 0 \quad \text{و} \quad e^{-2x} > 0$$

$$f(x) - x \leq 0 \quad \text{إذن}$$

ومنه (C) يوجد تحت (D) على $[0, +\infty[$.

$$3. \text{ أ - } (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + x \cdot \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + x \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + x \cdot \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2x} + 1) + 4xe^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{e^0 - 1 + 4 \times 0 \times e^0}{(e^0 + 1)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

ب - ليكن x من $[0, +\infty[$:

$$4x \geq 0$$

$$e^{4x} \geq 1 \quad (\text{exp تزايدية قطعاً على } \mathbb{R})$$

$$e^{4x} - 1 \geq 0$$

$$\text{لدينا : } e^{4x} - 1 \geq 0$$

$$4xe^{2x} \geq 0 \quad \text{و} \quad e^{2x} > 0 \quad \text{و} \quad 4x \geq 0$$

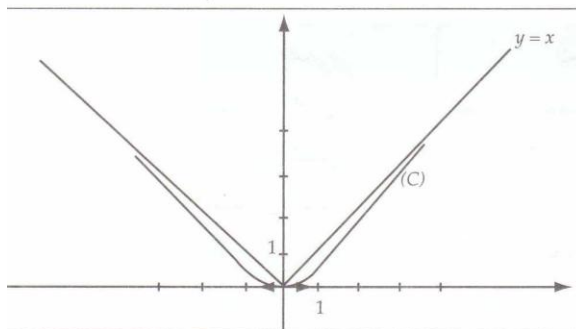
$$\text{إذن } e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0 \quad \text{لكل } x \text{ من } [0, +\infty[$$

$$(\forall x \in [0, +\infty[) : (e^{2x} + 1)^2 > 0 \quad \text{ج -}$$

$$\text{إذن } f'(x) \text{ لها إشارة } e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \text{ على } [0, +\infty[$$

$$\text{إذن } (\forall x \in [0, +\infty[) : f'(x) \geq 0$$

x	0	+
$f'(x)$	0	+
f	0	+



f دالة زوجية

إذن : محور الأرتاب محور تماثل لـ (C) .