

7	المعامل :	الرياضيات	المادة :
3 س	مدة الإنجاز :	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعب (ة) :

تمارين 2

1. $\Delta = -64 \leftarrow z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$
أي : $\Delta = (8i)^2$
ومنه : $z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$ و $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$
2. أ - $z' - 0 = e^{\frac{4\pi}{3}}(z - 0)$
أي : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$
ب - $z'_A = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A$
 $= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(8i)$
 $= 4\sqrt{3} - 4i = z_B$
ومنه B هي صورة A بالدوران R.
- ج - $\frac{a-b}{c-b} = \frac{8i - 4\sqrt{3} + 4i}{8\sqrt{3} + 8i - 4\sqrt{3} + 4i}$
 $= \frac{-4\sqrt{3} + 12i}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}$
 $= \frac{-3 + 6\sqrt{3} + 9}{3 + 9} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1, \frac{\pi}{3}$
- د - لدينا $\frac{a-b}{c-b} = \left[\frac{BA}{BC}, (\overline{BC}, \overline{BA})\right]$
إذن $\frac{BA}{BC} = 1$ و $(\overline{BC}, \overline{BA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$
ومنه ABC مثلث متساوي الأضلاع.

تمارين 3

1. $Card(\Omega) = A_8^2 = 56$
 $Card(A) = A_3^2 = 6 \Rightarrow p(A) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

تمارين 1

1. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z - 11 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 - 11 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25 = 5^2$
إذن مركز (S) هو $\Omega(1, 2, 3)$ وشعاعها هو $r = 5$
2. أ - لدينا : $\overline{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ و $\overline{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
 $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$
 $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \perp (ABC) \Rightarrow (ABC): 0x + 4y + 3z + d = 0$
 $A(0, -2, 0) \in (ABC) \Rightarrow 0 - 8 + 0 + d = 0$
 $\Rightarrow d = 8 \Rightarrow (ABC): 4y + 3z + 8 = 0$
ب - $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|8 + 9 + 8|}{\sqrt{0 + 16 + 9}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = 5 = r$
إذن (ABC) مماس لـ (S).
3. أ - Δ يمر من Ω و $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ موجهة لـ Δ
إذن تمثيل بارامترى لـ Δ هو :
 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ أي : $\begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
ب - بتعويض التمثيل في معادلة (ABC) نحصل على المعادلة :
 $4(2 + 4t) + 3(3 + 3t) + 8 = 0$
 $25t = -25$ أي $t = -1$
ومنه $H(1, -2, 0)$ هي نقطة تقاطع Δ و (ABC).
ج - نعوض إحداثيات H في معادلته (S) فنجد
 $1^2 + (-2)^2 + 0^2 - 2(1) - 4(-2) - 6(0) - 11 = 0$
ومنه H هي نقطة تماس (ABC) و (S).

4. أ - نبين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$

• من أجل $n = 1$ لدينا : $u_1 = \frac{3u_0}{21+u_0} = \frac{3}{22} < \frac{1}{7}$

أي : $u_1 < \left(\frac{1}{7}\right)^1$ (صحيح)

• افتراض التراجع : $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$

• البرهان من أجل $n+1$:

$$u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{7} u_n < \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{7} u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} \quad \text{ومنه :}$$

$$0 < u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n \quad \text{ب - لدينا :}$$

$$\lim 0 = \lim \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0 \quad \text{و}$$

$$-1 < \frac{1}{7} < 1 \quad \text{لأن :}$$

$$\lim u_n = 0 \quad \text{إذن :}$$

حسب مصاديق التقارب.

تمرين 5

$$1-I. \text{ أ - } (x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 = 3x^3-x-2$$

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x} \quad \text{ب -}$$

2. أ - لدينا لكل x من $]0, +\infty[$:

$$x > 0 \quad \text{و} \quad 3x^2 > 0 \quad \text{و} \quad 3x > 0 \quad \text{و} \quad 2 > 0$$

$$\frac{3x^2+3x+2}{x} > 0 \quad \text{إذن}$$

$$g'(x) = (x-1) \frac{3x^2+3x+2}{x} \quad \text{ب - لدينا :}$$

$$\text{و} \quad \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0 \quad \text{لكل } x \text{ من }]0, +\infty[$$

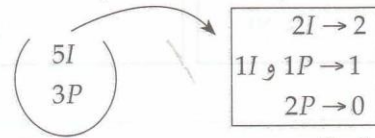
إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0, +\infty[$

$$\text{Card}(B) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\overline{B})$$

$$= 56 - A_6^2 = 56 - 30 = 26$$

$$\Rightarrow p(B) = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

2. أ - نضع : I = فردي و P = زوجي. الصندوق يحتوي على 5I و 3P



إذن قيم X هي : 2, 1, 0

$$p(X=1) = \frac{2 \times A_5^1 \times A_3^1}{A_8^2} = \frac{2 \times 5 \times 3}{56} = \frac{15}{28} \quad \text{ب -}$$

$$p(X=2) = \frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{5 \times 4}{56} = \frac{10}{28} \quad \text{ج -}$$

$$p(X=0) = \frac{A_3^2}{A_8^2} = \frac{3 \times 2}{56} = \frac{3}{28}$$

x_i	0	1	2
	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{28}$

تمرين 4

1. نبين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$

• من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1 > 0$ (صحيح)

• افتراض التراجع : $u_n > 0$

• البرهان من أجل $n+1$:

$$\text{لدينا : } 21 + u_n > 0 \quad \text{و} \quad 3u_n > 0$$

$$\text{إذن : } u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n} > 0$$

$$u_n > 0 \Rightarrow 21 + u_n > 21 \quad 2.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{21+u_n} < \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow \frac{3u_n}{21+u_n} < \frac{3u_n}{21}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$$

$$3. \text{ لدينا } u_n > 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{7} < 1$$

$$\text{إذن : } u_{n+1} < u_n \quad \text{ومنه } \frac{1}{7} u_n < u_n$$

وبالتالي (u_n) تناقصية.

وبما أنها مصفورة بالصفر فإنها متقاربة.

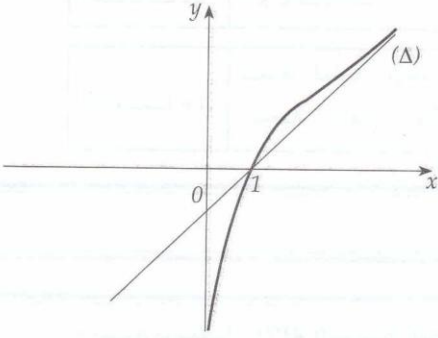
إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1+\ln(x)}{x^2} = 0$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج - لدينا : $f(x) = x-1+h(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

إذن (C) يقبل مقارب مائل معادلته $y = x-1$ بجوار $+\infty$

3. $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
 $y = 3x-3$

4. 

5. $\begin{cases} v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \\ u'(x) = \frac{1}{x^2} & u(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln(x) \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$

$= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e$

$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

ب - $A = \int_1^e f(x) - (x-1) dx$ (u.a)

$u.a = 1 \text{ cm}^2$

$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) dx$ (cm²)

$= \left[\ln(x) + \frac{1}{x} \right]_1^e + 1 - \frac{2}{e}$ (cm²)

$= 1 + \frac{1}{e} - 1 + 1 - \frac{2}{e}$ (cm²)

$= 1 - \frac{1}{e}$ (cm²)

3. أ -

x	0	1	$+\infty$
x-1		-	+

↓

x	0	1	$+\infty$
g(x)		3	

ب - لدينا $g(1) = 3 > 0$ القيمة الدنيا المطلقة

للدالة g على $]0, +\infty[$

إذن لكل x من $]0, +\infty[$: $g(x) \geq g(1) > 0$

ومنه لكل x من $]0, +\infty[$: $g(x) > 0$

1-II

$f'(x) = 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 - (x-1+\ln(x)) \cdot (2x)}{x^4}$

$= \frac{x^4 + x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x \ln(x)}{x^4}$

$= \frac{x^4 - x^2 + 3x - 2x \ln(x)}{x^4}$

$= \frac{x^3 - x - 2 \ln(x) + 3}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$

وبما أن : $g(x) > 0$ و $x^3 > 0$ على $]0, +\infty[$

فإن $f'(x) > 0$ وبالتالي f تزايدية على $]0, +\infty[$.

2. أ - لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1+\ln(x)) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1+\ln(x)}{x^2} = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

وهذا يعني أن (C) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = 0$

ب - لدينا :

$\frac{x-1+\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$