

الكيمياء

الجزء الأول :

1- تحضير محلول حمض الكلوريدريك .

1.1- تعبير كمية مادة الحمض $n(HCl)$:

$$\text{لدينا العلاقة : } n(HCl) = \frac{m_0(HCl)}{M(HCl)}$$

مع $m_0(HCl)$ كتلة كلورور الهيدروجين الخالص في المحلول التجاري .

* كثافة المحلول التجاري بالنسبة للماء : $d = \frac{m(HCl)}{m(H_2O)}$

$$\Rightarrow m(HCl) = d \times m(H_2O)$$

$$m(HCl) = d \times \rho \times V$$

مع : $m(HCl)$ كتلة المحلول التجاري .

* النسبة الكتلية للحمض في المحلول التجاري هي :

$$P = \frac{m_0(HCl)}{m(H_2O)}$$

$$\Rightarrow m_0(HCl) = P \times m(HCl)$$

$$\Rightarrow m_0(HCl) = P \times d \times \rho \times V$$

* نعوض في تعبير كمية المادة لنجد :

$$n(HCl) = \frac{m_0(HCl)}{M(HCl)}$$

$$n(HCl) = \frac{P \times d \times \rho \times V}{M(HCl)}$$

* حساب التركيز C_0 للمحلول التجاري :

$$C_0 = \frac{n(HCl)}{V} = \frac{P \times d \times \rho}{M(HCl)}$$

$$C_0 = \frac{(37\%) \times 1,15 \times 1 \times 103}{36,5} = 11,65 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$C_0 \simeq 11,6 \text{ mol.L}^{-1}$$

2.1- حساب الحجم V_0 للمحلول التجاري اللازم لتحضير الحجم

$V_A = 1L$ من المحلول المخفف (S_A) :

لدينا علاقة التخفيف : $C_0 \times V_0 = C_A \times V_A$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{C_A \times V_A}{C_0} = \frac{0,015 \times 1}{11,6}$$

$$V_0 = 1,29 \cdot 10^{-3} L \simeq 1,3 mL$$

2- دراسة بعض خاصيات قاعدة مذابة في الماء :

1.2- تعبير K_A : نستعمل الجدول الوصفي التالي :

المعادلة		$B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + HO^-$			
الحالة	التقدم	كميات المادة (mol)			
البداية	0	CV	وفير	0	0
النهاية	x_{max}	$CV - x_f$	وفير	x_f	x_f

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{[HO^-]}{C} \quad \text{* لدينا :}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{K_e}{C \times [H_3O^+]}$$

$$\Rightarrow [H_3O^+] = \frac{K_e}{C \times \tau}$$

* ثابتة الحمضية :

$$K_A = \frac{[B] \times [H_3O^+]}{[BH^+]} = [H_3O^+] \times \frac{[B]}{[BH^+]}$$

$$[B] = \frac{CV - x_f}{V} \quad \text{حسب الجدول الوصفي لدينا :}$$

$$\Rightarrow [B] = C - \frac{x_f}{V} = C - [HO^-] = C - C \cdot \tau$$

$$[B] = C(1 - \tau)$$

$$[BH^+] = \frac{x_f}{V} = [HO^-] = C \times \tau$$

$$K_A = \frac{K_e}{C \times \tau} \times \frac{C(1 - \tau)}{C \times \tau} \quad \text{يصبح تعبير } K_A$$

$$K_A = \frac{K_e}{C} \times \frac{(1 - \tau)}{C^2}$$

$$C_A \cdot V_A - x_{\max} = 0$$

$$\Rightarrow x_{\max} = C_A \times V_A$$

$$\Rightarrow x_{\max} = 0,015 \times 5 \times 10^{-3}$$

$$x_{\max} = 7,5 \times 10^{-5} \text{ mol}$$

$$[H_3O^+] = \frac{C_A \times V_A}{V_A + V_B} \quad \text{- تحديد } x_f$$

$$\Rightarrow [H_3O^+] \times (V_A + V_B) = C_A \times V_A - x_f$$

$$\Rightarrow x_f = C_A \times V_A - [H_3O^+] \times (V_A + V_B)$$

من المبيان نحدد قيمة pH المحلول الموافق للحجم $V_A = 5 \text{ mL}$

المضاف : $pH \simeq 9$

$$x_f = 0,015 \times 5 \times 10^{-3} - 10^{-9} \times (5 + 20) \times 10^{-3}$$

$$x_f = 7,49 \times 10^{-5} \text{ mol}$$

- حساب τ :

$$\tau = \frac{7,49 \times 10^{-5}}{7,5 \times 10^{-5}} = 0,999 \simeq 1$$

دليل على أن تفاعل المعايرة كلي .

3.3 - * من المبيان نحدد الحجم $V_{AE} \simeq 14,2 \text{ mL}$:

$$C' \cdot V_B = C_A \times V_{AE} \quad \text{* حساب } C'$$

$$\Rightarrow C' = \frac{C_A \times V_{AE}}{V_B}$$

$$\Rightarrow C' = \frac{0,015 \times 14,2 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}} = 1,065 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

* حساب C_B :

$$C_B = 1000 \times C'$$

$$C_B = 10,65 \text{ mol.L}^{-1}$$

4.3 - الكاشف الملون الموافق لهذه المعايرة هو أحمر الكلوروفينول

لأن : $pH_E =$ وينتمي إلى منطقة انعطاف هذا الكاشف .

الجزء الثاني :

1 - دراسة التحول الكيميائي .

1.1 - عند الأنود يتم تفاعل أكسدة :



2.2 - حساب نسبة التقدم النهائي لكلا المحلولين :

نستعمل العلاقة :

$$\tau = \frac{Ke}{C \times [H_3O^+]}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{Ke}{C \times 10^{-pH}}$$

* المحلول الأول لـ NH_3 :

$$\tau_1 = \frac{Ke}{C \times 10^{-pH_1}} = \frac{10^{-14}}{10^{-2} \times 10^{-10,6}}$$

$$\tau_1 = 0,04$$

* المحلول الثاني :

$$\tau_2 = \frac{10^{-14}}{10^{-2} \times 10^{-9}} = 10^{-3}$$

3.2 - حساب قيمة pK_A لكلا المزدوجتين :

$$pK_A = -\log K_A = -\log \left(\frac{Ke}{C} \times \frac{1 - \tau}{\tau^2} \right)$$

* المزدوجة NH_4^+/NH_3 :

$$pK_{A1} = -\log \left[\frac{10^{-14}}{10^{-2}} \times \frac{(1 - 0,04)}{(0,04)^2} \right]$$

$$pK_{A1} = 9,2$$

* المزدوجة الثانية :

$$pK_{A2} = -\log \left[\frac{10^{-14}}{10^{-2}} \times \frac{(1 - 10^{-3})}{(10^{-3})^2} \right]$$

$$pK_{A1} = 6$$

3 - المعايرة حمض - قاعدة لمحلول الأمونياك :

1.3 - معادلة تفاعل المعايرة :



2.3 - الجدول الوصفي لتفاعل المعايرة :

المعادلة		$NH_3 + H_3O^+ \rightarrow NH_4^+ + H_2O$			
الحالة	التقدم	كميات المادة (mol)			
البداية	0	$C' \cdot V_B$	$C_A \cdot V_A$	0	وفير
النهاية	x_f	$C' \cdot V_B - x_f$	$C_A \cdot V_A - x_f$	x_f	وفير

* نسبة التقدم النهائي τ :

$$\tau = \frac{x_f}{x_{\max}}$$

- بالنسبة للحجم $V_A = 5 \text{ mL}$: قبل التكافؤ إذن H_3O^+ هو

المحد :

الفيزياء

التمرين الأول: الفيزياء النووية في المجال الطبي .

1.1 - معادلة التفتت : ${}_{15}^{32}P \longrightarrow {}_Z^AY + {}_{-1}^0e$

حسب قانوني صودي : $A=32$, $Z=16$

2.1 - حساب القيمة المطلقة للطاقة الممطرة :

$$|\Delta E| = |\Delta m \times C^2|$$

$$= |(m(y) + m(\beta^-) - m(p) \times C^2)|$$

$$|\Delta E| = 1,16 \text{ MeV}$$

2 - الحقن الوريدي :

1.2 - تعريف النشاط الإشعاعي $1Bq$: تفتت واحد في الثانية .

2.2 - أ- حساب Δt :

لدينا حسب قانون التناقص الإشعاعي :

$$a_2 = a_0 \cdot e^{-\lambda t_2} \quad \text{و} \quad a_1 = a_0 \cdot e^{-\lambda t_1}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = e^{-\lambda t_1} \times e^{\lambda t_2} = e^{\lambda(t_2 - t_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = e^{\lambda \cdot \Delta t}$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot \Delta t = \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

$$\Delta t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

$$\Delta t = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

$$\Delta t = \frac{14,3}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{a_1}{0,2 \times a_2}\right) = 33,2 \text{ jours}$$

ب- تعبير عدد النويدات المتفتتة خلال المدة Δt :

لدينا حسب قانون التناقص الإشعاعي :

$$N_2 = N_0 \cdot e^{-\lambda t_2} \quad , \quad N_1 = N_0 \cdot e^{-\lambda t_1}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\lambda t_1} \times e^{\lambda t_2} = e^{\lambda \cdot \Delta t}$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2 \cdot e^{\lambda \cdot \Delta t}$$

$$\Delta N = N_1 - N_2 \quad \text{عدد النوى المتفتتة هو :}$$

$$\Delta N = N_2 \cdot e^{\lambda \cdot \Delta t} - N_2$$

$$\Delta N = N_2 \cdot [e^{\lambda \cdot \Delta t} - 1]$$

- عند الكاثود يتم تفاعل اختزال :



1.2 - * العلاقة بين Q و x :

$$Q = n(e^-) \times F = 2 \cdot x \cdot F$$

$$\Rightarrow x = \frac{Q}{2F}$$

2 - استغلال التحول الكيميائي :

1.2 - حساب الكتلة m :

$$m = n(Zn) \times M = x \times M$$

$$\Rightarrow m = \frac{Q}{2F} \times M$$

$$\Rightarrow m = \frac{I \times \Delta t}{2 \times F} \times M$$

$$m = \frac{80 \times 10^3 \times 48 \times 3600}{2 \times 96500} \times 65,4$$

$$m = 4,68 \times 10^6 \text{ g}$$

2.2 - حساب الحجم V :

المعادلة		$H_2O_{(l)} \rightleftharpoons \frac{1}{2}O_{2(g)} + 2H_{(aq)}^+ + 2e^-$			
الحالة	التقدم	كميات المادة (mol)			
البديئية	0	وفير	0	وفير	0
النهائية	x_f	وفير	$\frac{1}{2} \cdot x$	وفير	$2x$

$$* \text{ لدينا : } x = \frac{Q}{2F} = \frac{I \times \Delta t}{2F}$$

* كمية مادة غاز O_2 الناتج بالمردود r هو :

$$n(O_2) = r \times \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow n(O_2) = r \times \frac{I \times \Delta t}{4 \times F}$$

$$\Rightarrow \frac{V(O_2)}{V_m} = r \times \frac{I \times \Delta t}{4 \times F}$$

$$\Rightarrow V(O_2) = r \times \frac{I \times \Delta t}{4 \times F} \times V_m$$

$$V(O_2) = 0,8 \times \frac{80 \times 10^3 \times 48 \times 3600}{4 \times 96500} \times 24$$

$$V(O_2) = 6,88 \cdot 10^5 \text{ L}$$

$$\Rightarrow A.e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[1 - \frac{RC}{\tau}\right] = 0$$

$$1 - \frac{RC}{\tau} = 0 \quad \text{إذن} \quad A.e^{-\frac{t}{\tau}} \neq 0 \quad \text{مع}$$

$$\Rightarrow \tau = R$$

3.1- التعبير الحرجي للتوتر u_C :

$$u_C + u_R = E \quad \text{لدينا:}$$

$$\Rightarrow u_C = E - u_R$$

$$u_C = E - R.i$$

$$u_C = E - R.A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C = E - R.\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{4.1- لدينا:}$$

$$\frac{i(t)}{I_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{مع} \quad I_0 = \frac{E}{R}$$

$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0,37 \quad \text{عند اللحظة} \quad t = \tau$$

$$\tau = 0,1ms \quad \text{من المبيان نجد:}$$

$$\tau = 10^{-4}s$$

$$\tau = R.C \quad \text{استنتاج قيمة } C:$$

$$\Rightarrow C = \frac{\tau}{R}$$

$$\Rightarrow C = \frac{10^{-4}}{100} = 10^{-6}F$$

$$E_C = \frac{1}{2}.C.u_C^2 \quad \text{5.1- تعبير الطاقة الكهربائية للمكثف هو:}$$

$$u_C = E \quad \text{* عند نهاية الشحن:}$$

$$E_C = \frac{1}{2}.C.E^2 = E_e$$

$$E_C(\tau) = E_e(\tau) \quad \text{* عند اللحظة} \quad t = \tau$$

$$E_e(\tau) = \frac{1}{2}.C.u_C^2(\tau)$$

$$E_e(\tau) = \frac{1}{2}.C.E^2 = (1 - e^{-1})^2$$

* تعبير النسبة:

$$\frac{E_e(\tau)}{E_e} = (1 - e^{-1})^2 = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$$

$$\Delta N = \frac{a_2}{\lambda} \cdot [e^{\lambda \cdot \Delta t} - 1]$$

$$\Rightarrow \Delta N = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \times 0,2 \times a_1 \times \left[e^{\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot \Delta t} - 1\right]$$

$$\Delta N = \frac{14,3 \times 24 \times 3600}{\ln 2} \times 0,2 \times 2,5 \times 10^9 \cdot (e^{\frac{\ln 2}{14,3} \times 33,2} - 1)$$

$$\Delta N = 3,56 \times 10^{15}$$

ج- حساب بالجول القيمة المطلقة للطاقة المحررة خلال المدة

الزمنية Δt :

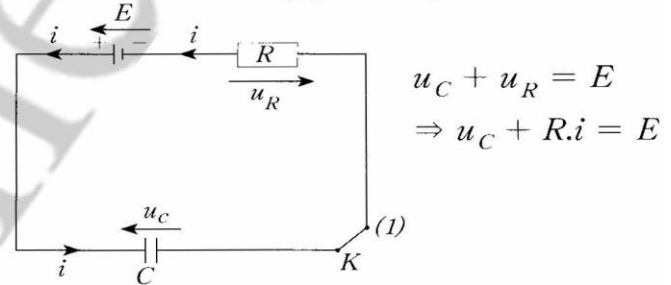
$$|E| = (\Delta N) \times |\Delta E|$$

$$= 3,56 \times 10^{15} \times 1,16 \times 1,6 \times 10^{-13}$$

$$|E| = 660,74J$$

التمرين الثاني:

1.1- المعادلة التفاضلية لشدة التيار i :



$$\text{نشتق هذه المعادلة بالنسبة للزمن:} \quad \frac{du_C}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow C \frac{du_C}{dt} + RC \frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow i + RC \frac{di}{dt} = 0$$

$$2.1- \text{حل المعادلة التفاضلية هو:} \quad i = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(0) = A \quad \text{* عند اللحظة} \quad t=0$$

$$i(0) = \frac{u_R(0)}{R} = \frac{E}{R}$$

$$A = \frac{E}{R}$$

نستنتج تعبير A :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

* تحديد τ :

$$\text{نعوض في المعادلة التفاضلية:} \quad A.e^{-\frac{t}{\tau}} - RC.\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}(0) = -I_m \cdot 2\pi N_0 \sin \varphi$$

$$\Rightarrow -I_m \cdot 2\pi N_0 \sin \varphi < 0$$

$$\Rightarrow \sin \varphi > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$$

2.2 - الطاقة الكلية للمتذبذب هي :

$$E = E_e + E_m$$

* عند اللحظة $t = 0$: $i(0) = 0$ إذن : $E_m = 0$

$$u_c(0) = E = 6V$$

$$E_0 = E_e(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2(0) \quad \text{إذن :}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-6} \times (6)^2 = 1,8 \times 10^{-5} J$$

* عند اللحظة $t' = \frac{7}{4} T$ تكون شدة التيار i قصوى

$$u_c(t') = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$E' = E_m = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \quad \text{إذن :}$$

$$i(t') = 10mA \quad \text{من المبيان نجد :}$$

$$E' = \frac{1}{2} \times 0,2 \times (10 \times 10^{-3})^2 = 10^{-5} J$$

* حساب التعبير ΔE :

$$\Delta E = E' - E_0$$

$$\Rightarrow \Delta E = 10^{-5} - 1,8 \times 10^{-5} = -0,8 \times 10^{-5} J$$

$$\boxed{\Delta E = -8 \times 10^{-6} J}$$

* تتناقص الطاقة الكلية للمتذبذب، دليل على أن مقاومة الوشيعية

غير مهمة ($r \neq 0$).

$$2.3 - \text{أ- إثبات التعبير : } E_n = E_0 (1 - p)^n$$

* عند اللحظة $t_0 = 0$ طاقة المتذبذب هي : E_0

* عند اللحظة $t_1 = T$ طاقة المتذبذب هي : E_1

تتناقص الطاقة بالقيمة pE_0

$$E_1 = E_0 - pE_0 = E_0 (1 - p) \quad \text{إذن :}$$

$$E_1 = E_0 (1 - p)^1$$

* عند اللحظة $t_2 = 2T$ تكون طاقة المتذبذب هي E_2

بحيث تتناقص بالقيمة pE_1

$$\Rightarrow \frac{E_e(\tau)}{E_e} = \left(\frac{e-1}{e}\right)^2$$

$$\frac{E_e(\tau)}{E_e} = \left(\frac{e-1}{e}\right)^2 \simeq 0,4 = 40\%$$

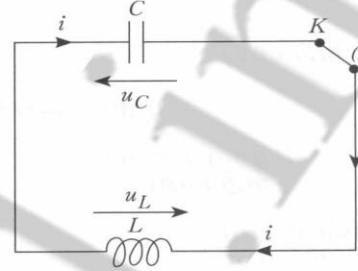
2 - دراسة تفريغ المكثف في وشيعة :

1.2 - مقاومة الوشيعية مهمة ($r \simeq 0$)

أ- المعادلة التفاضلية لشدة التيار i :

$$u_L + u_C = 0$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + u_C = 0$$



نشتق هذه المعادلة بالنسبة للزمن :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow LC \frac{d^2 i}{dt^2} + C \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{L} \cdot i \right] = 0$$

ب- الحل هو : $i(t) = I_m \cdot \cos(2\pi N_0 t + \varphi)$

* تحديد I_m : القيمة القصوى لشدة التيار

$$I_m = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{6}{100} = 0,06A$$

* تحديد φ : $i(0) = I_m \cdot \cos \varphi$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{i(0)}{I_m}$$

من المبيان : $i(0) = 0$

$$\Rightarrow \cos \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

تحديد إشارة φ من المبيان لدينا : $\frac{di}{dt}(0) < 0$

$$\frac{di}{dt} = -I_m 2\pi N_0 \sin(2\pi N_0 t + \varphi) \quad \text{وكذلك :}$$

إسقاط على المحورين ox' و oy' :

$$\begin{cases} P_x + R_x = m.a_x \\ P_y + R_y = m.a_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg \sin \alpha - R_T = m.a \\ -mg \cos \alpha - R_N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_T = mg \sin \alpha - m.a \\ R_N = -m.g.\cos \alpha \end{cases}$$

* تعبير $\tan \varphi$:

$$\tan \varphi = \frac{R_T}{R_N} = \frac{m(g \sin \alpha - a)}{m.g.\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \tan \alpha - \frac{a}{g \cos \alpha}$$

1.2 - على الجزء (AB) الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

لدينا المعادلة الزمنية للسرعة :

$$v = at + v_0$$

$$\Rightarrow v = a.t \quad (v_0 = 0 \text{ مع})$$

$$v_B = a \times t_B \quad \text{عند الموضع } B :$$

$$\Rightarrow a = \frac{v_B}{t_B}$$

$$a = \frac{20}{10} = 2 \text{ m.s}^{-2}$$

* حساب معامل الاحتكاك $\tan \varphi$:

$$\tan \varphi = \tan(20) - \frac{2}{9,8 \times \cos(20)}$$

$$\tan \varphi = 0,147$$

1.3 - تعبير R :

$$R = \sqrt{R_T^2 + R_N^2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(R_N \cdot \tan \varphi)^2 + R_N^2}$$

$$\Rightarrow R = R_N \cdot \sqrt{(\tan \alpha)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow R = m.g.\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}$$

$$R = 80 \times 9,8 \times \cos 20 \times \sqrt{1 + (0,147)^2}$$

$$R = 744,6 \text{ N}$$

إذن : $E_2 = E_1 - pE_1$

$$\Rightarrow E_2 = E_0(1 - p) - p.E_0(1 - p)$$

$$\Rightarrow E_2 = E_0(1 - p)(1 - p)$$

$$E_2 = E_0(1 - p)^2$$

على الصيغة المطلوبة .

* عند اللحظة $t_n = nT$ تكون طاقة المتذبذب هي E_n

وتتناقص بالمقدار : pE_{n-1}

إذن : $E_n = E_{n-1} - p.E_{n-1}$

$$= E_0 \cdot (1 - p)^{n-1} - p.E_0(1 - p)$$

$$\Rightarrow E_n = E_0(1 - p)^{n-1} \cdot (1 - p)$$

$$\Rightarrow E_n = E_0(1 - p)^n$$

ب- حساب n :

الطاقة المتبقية هي : $E_n = (4\%)E_0$

$$\Rightarrow E_0 \cdot (1 - p)^n = (4\%)E_0$$

$$\Rightarrow (1 - p)^n = 0,04$$

$$\Rightarrow \ln(1 - p)^n = \ln(0,04)$$

$$\Rightarrow n \cdot \ln(1 - p) = \ln(0,04)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(0,04)}{\ln(1 - p)}$$

$$n = \frac{\ln(0,04)}{\ln(1 - 0,275)} = 10$$

التمرين الثالث:

الجزء الأول : دراسة حركة منزلج

1 - دراسة القوى المطبقة على المنزلج بين A و B :

1.1 - نطبق القانون الثاني لنيوتن على المنزلج و هو خاضع

لقوتين :

$\vec{P}$: وزن المنزلج .

$\vec{R}$: تأثير السطح على المنزلج .

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{V_c^2}{g} \cdot \sin(2\alpha) &\geq L \\ \Rightarrow V_c^2 &\geq \frac{g \cdot L}{\sin(2\alpha)} \\ \Rightarrow V_c &\geq \sqrt{\frac{g \cdot L}{\sin(2\alpha)}} \\ V_{cmin} &= \sqrt{\frac{g \cdot L}{\sin(2\alpha)}} \quad \text{القيمة الدنيا للسرعة هي :} \\ V_{cmin} &= \sqrt{\frac{9,8 \times 15}{\sin(40)}} \simeq 15,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

الجزء الثاني :

1- تحديد موضع مركز القصور G للمجموعة :

1.1- تعبير الطاقة الميكانيكية E_m : $E_m = E_c + E_{pp}$

الطاقة الحركية : $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}^2$

طاقة الوضع الثقالية : $E_{pp} = mgz + cte$

مع : $m = m_1 + m_2$

$z = d(1 - \cos \theta)$

$E_{pp} = (m_1 + m_2)gd(1 - \cos \theta) + cte$

باعتبار الحالة المرجعية المعنية : $cte = 0$

$E_{pp} = (m_1 + m_2)gd(1 - \cos \theta)$

بالنسبة للتذبذبات الصغيرة لدينا : $1 - \cos \theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$

$E_{pp} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gd \cdot \theta^2$

يصبح تعبير الطاقة الميكانيكية هو :

$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}^2 + (m_1 + m_2)gd \cdot \theta^2$

* بالنسبة لـ $\theta = \theta_m$ تكون $\dot{\theta} = 0$

إذن : $E_m = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gd \cdot \theta_m^2$

$\Rightarrow \frac{E_m}{\theta_m^2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gd$

1.2 - * لدينا : $E_m = E_c + E_{pp}$

$\Rightarrow E_c = E_m - E_{pp}$

$E_c = E_m - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gd \cdot \theta^2$

2- مرحلة القفز :

2.1- لدينا : $v_c = 16,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

عند قمة المسار (S) تكون : $v_{ys} = 0$

مع : $v_y = -gt + V_c \sin \alpha$

$\Rightarrow v_{ys} = -gt_s + V_c \sin \alpha = 0$

$\Rightarrow t_s = \frac{V_c}{g} \cdot \sin \alpha$

نعوض في المعادلات الزمنية :

$x_s = V_c \cdot \cos \alpha \times \frac{V_c}{g} \cdot \sin \alpha$

$x_s = \frac{V_c^2}{g} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$

$x_s = \frac{(16,27)^2}{9,8} \times \cos 20 \times \sin 20 = 8,68 \text{ m}$

$y_s = -\frac{g}{2} \cdot \frac{V_c^2}{g^2} \cdot \sin^2 \alpha + V_c \cdot \sin \alpha \times \frac{V_c}{g} \cdot \sin \alpha$

$\Rightarrow y_s = \frac{V_c^2}{2g^2} \cdot (\sin \alpha)^2$

$y_s = \frac{(16,27)^2}{2 \times 9,8} \times (\sin 20)^2 = 1,58 \text{ m}$

2.2- لكي لا يسقط في البركة المائية يجب أن يكون أفصول

مركز قصوره G أكبر من عرض البركة المائية عندما يصل

إلى D : $x_D \geq L$

علما أن : $y_D = 0$

ومن المعادلة الزمنية $y(t)$ نجد اللحظة t_D :

$-\frac{g}{2} t_D^2 + V_c \sin \alpha \cdot t_D = 0$

مع $t_D \neq 0$ فإن $-\frac{g}{2} \cdot t_D + V_c \sin \alpha = 0$

$\Rightarrow t_D = \frac{2V_c}{g} \sin \alpha$

نعوض في $x(t)$ لنجد x_D :

$x_D = V_c \cdot \cos \alpha \cdot t_D = V_c \cdot \cos \alpha \times \frac{2V_c}{g} \sin \alpha$

$\Rightarrow x_D = \frac{2V_c^2}{g} \cos \alpha \cdot \sin \alpha$

$\Rightarrow x_D = \frac{V_c^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$

مع : $x_D \geq L$

$$\Rightarrow 2\pi N_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)gd}{J_\Delta}}$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)gd}{J_\Delta}}$$

2.3 - حساب J_Δ علما أن $N_0 = 1\text{Hz}$:

$$J_\Delta = \frac{(m_1 + m_2)gd}{(2\pi N_0)^2}$$

$$J_\Delta = \frac{(0,1 + 0,3) \times 9,8 \times 0,413}{(2\pi \times 1)^2} = 0,041\text{Kg.m}^2$$

* مبياننا لدينا :

$$E_m = 55\text{mJ}$$

$$\theta_m^2 = 68 \times 10^{-3} \text{rad}^2$$

$$\frac{E_m}{\theta_m^2} = \frac{55 \times 10^{-3}}{68 \cdot 10^{-3}}$$

* وكذلك لدينا العلاقة : $\frac{E_m}{\theta_m^2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gd$

$$\Rightarrow d = \frac{2}{(m_1 + m_2)g} \times \frac{E_m}{\theta_m^2}$$

$$d = \frac{2}{(0,1 + 0,3) \times 0,81}$$

$$\Rightarrow d = 0,413\text{m}$$

2 - تحديد عزم القصور J_Δ :

2.1 - نطبق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$\Sigma M_\Delta (\vec{F}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow M_\Delta (\vec{P}) + M_\Delta (\vec{R}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -(m_1 + m_2)gd \sin \theta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2)gd}{J_\Delta} \cdot \sin \theta = 0$$

و بالنسبة للتذبذبات الصغيرة لدينا : $\sin \theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2)g \cdot d}{J_\Delta} \cdot \theta = 0$$

2.2 - تعبير التردد الخاص N_0 :

* الحل هو : $\theta(t) = \theta_m \cdot \cos(2\pi N_0 t + \varphi)$

$$\dot{\theta} = -(2\pi N_0) \theta_m \cdot \sin(2\pi N_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta} = -(2\pi N_0)^2 \cdot \theta_m \cdot \cos(2\pi N_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -(2\pi N_0)^2 \cdot \theta(t)$$

وباعتماد المعادلة التفاضلية :

$$-(2\pi N_0)^2 \cdot \theta + \frac{(m_1 + m_2)gd}{J_\Delta} \cdot \theta = 0$$

$$-(2\pi N_0)^2 + \frac{(m_1 + m_2)gd}{J_\Delta} = 0 : (\theta \neq 0 \text{ مع})$$

$$\Rightarrow (2\pi N_0)^2 = \frac{(m_1 + m_2)gd}{J_\Delta}$$