

المتتاليات العددية

تعريف ومصطلحات:

$I \subset \mathbb{R}$ كل تطبيق $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ يسمى متتالية عددية نرمز لها بـ U_n

U_n متتالية محدودة:

✓ مكبورة بالعدد $M \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \leq M$

✓ مصغورة بالعدد $m \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \geq m$

✓ كل متتالية تزايدية ومكبورة فهي متقاربة .

✓ كل متتالية تناقصية ومصغورة فهي متقاربة .

✓ متقاربة معناها أن U_n تقبل نهاية منتهية

U_n متتالية رتيبة

+ تزايدية $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} - U_n > 0$

+ تناقصية $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} - U_n < 0$

البرهان بالترجع

غالبا ما نستعمل البرهان بالترجع في درس المتتاليات وذلك عند ما نريد أن نبين أن U_n رتيبة أو محدودة والبرهان بالترجع يعتمد على 3 عناصر أساسية هي :

✓ التحقق : نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد الأول .

✓ الافتراض : نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد n .

✓ البرهان : نبين أن العبارة تبقى صحيحة بالنسبة للحد $n+1$.



❏ متتالية هندسية . متتالية حسابية .

الأهداف	متتالية حسابية	متتالية هندسية
تحديد الأساس	U_n متتالية حسابية أساسها r $U_{n+1} - U_n = r \quad (\forall n \in \mathbb{N})$	U_n متتالية هندسية إذا كان $U_{n+1} = q U_n$ يسمى الأساس.
صيغة الحد العام	○ إذا كان U_0 هو الحد الأول فإن صيغة الحد العام هي : $U_n = U_0 + nr$ ○ إذا كان الحد الأول هو U_p فإن صيغة الحد العام: $U_n = U_p + (n - p)r$	ص.ح.ع هي : $U_n = U_0 q^n$ إذا كان الحد الأول هو U_p والأساس هو q فإن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \quad U_n = U_p q^{n-p}$
حدود متتابعة	إذا كان $U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n$	$U_{n-1} \times U_{n+1} = U_n^2$
المجموع	$S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$	$S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = U_0 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$

❏ نهايات المتتاليات :

1. توسيع مفهوم النهايات عند الدوال تبقى صحيحا كذلك عند المتتاليات

2. إذا كان $a \leq U_n \leq b$ و U_n متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = a$

3. إذا كان $v_n \leq U_n \leq w_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a)^n = \begin{cases} +\infty \rightarrow a > 1 \\ 1 \rightarrow a = 1 \\ 0 \rightarrow |a| < 1 \\ \text{rien} \rightarrow a < -1 \end{cases}$$

4. متتالية من نوع $U_{n+1} = f(U_n)$

نعتبر U_n متتالية ترجعية محدد بـ $n \geq n_0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ و U_0 بحيث f دالة متصلة على مجال I ($I \subset \mathbb{R}$) و $f(I) \subset I$. إذا كانت U_n متتالية متقاربة فإن نهايتها هي حل المعادلة : $f(x) = x$

