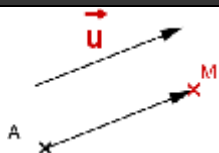


Le Barvcentre

المرج

Rappels :

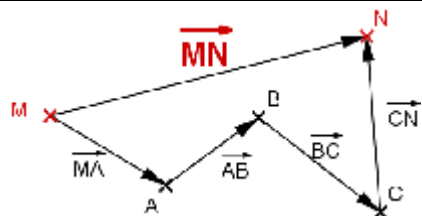


I. تذكير :

(1) خاصية 1:

مهما تكن المتجهة $\vec{u}$ ومهما تكن النقطة A ،
توجد نقطة وحيدة M تحقق العلاقة : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

(2) علاقة شال:



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$$

Propriété principale :

برهان:

لنكن نقطة ثابتة ، بتطبيق علاقة شال على العلاقة :

$$a.\overrightarrow{AG} + b.\overrightarrow{BG} + c.\overrightarrow{CG} + d.\overrightarrow{DG} + \dots + e.\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

نجد :

$$a.(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) + \dots + e.(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OE}) = \vec{0}$$

$$(a + b + \dots + e).\overrightarrow{OG} = a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + \dots + e.\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a + b + \dots + e} (a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + \dots + e.\overrightarrow{OE})$$

نضع $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \dots + \overrightarrow{OE} = \vec{u}$ وتصبح العلاقة :

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a + b + \dots + e} \vec{u}$ وهكذا نستنتج ، حسب الخاصية 1 أن النقطة G وحيدة

II. خاصية أساسية :

خاصية وتعريف 3:

مهما تكن النقط A و B و C و D و ... و E
ومهما تكن الأعداد a و b و c و d و ... و e
بحيث $a + b + c + d + \dots + e \neq 0$
توجد نقطة وحيدة G تحقق العلاقة المتجهية التالية :

$$a.\overrightarrow{AG} + b.\overrightarrow{BG} + c.\overrightarrow{CG} + d.\overrightarrow{DG} + \dots + e.\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

النقطة G التي تحقق العلاقة السابقة تسمى مرجح النظام المتزن

$$\{(A, a); (B, b); (C, c); \dots; (E, e)\}$$

ملاحظة: عندما تكون الأعداد a و b و c و d و ... و e متساوية فإن G تسمى مركز ثقل المضلع ABCD...E .

Propriétés générales :

تجميعية المرجح Associativité du barycentre :

إذا كان G_1 هو مرجح النظام المتزن:

$$\{(A_1, a_1); (A_2, a_2); (A_3, a_3); \dots; (A_p, a_p)\}$$

و G_2 هو مرجح النظام المتزن:

$$\{(B_1, b_1); (B_2, b_2); (B_3, b_3); \dots; (B_p, b_p)\}$$

فإن G هو مرجح النظام المتزن.

$$\{(A_1, a_1); (A_2, a_2); (A_3, a_3); \dots; (A_p, a_p); (B_1, b_1); (B_2, b_2); (B_3, b_3); \dots; (B_p, b_p)\}$$

مرجح النظام:

$$\{(G_1, (a_1 + \dots + a_p)); (G_2, (b_1 + \dots + b_p))\}$$

III. خاصيات عامة :

خاصية التجانس Homogénéité :

إذا كان G مرجح النظام المتزن:

$$\{(A, a); (B, b); (C, c); \dots; (E, e)\}$$

فإن G هو مرجح النظام المتزن:

$$\{(A, ka); (B, kb); (C, kc); \dots; (E, ke)\}$$

مهما يكن العدد غير المنعدم k .

برهان: الخاصية صحيحة نظرا للتكافؤ التالي :

$$a.\overrightarrow{AG} + b.\overrightarrow{BG} + c.\overrightarrow{CG} + d.\overrightarrow{DG} + \dots + e.\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

$$\Downarrow \Uparrow$$

$$ka.\overrightarrow{AG} + kb.\overrightarrow{BG} + kc.\overrightarrow{CG} + kd.\overrightarrow{DG} + \dots + ke.\overrightarrow{EG} = \vec{0}$$

برهان: لدينا على التوالي حسب المعطيات وباستعمال العلاقة المرجحية الأولى :

$$(1): (a_1 + a_2 + \dots + a_p) \overrightarrow{GG_1} = a_1.\overrightarrow{GA_1} + a_2.\overrightarrow{GA_2} + \dots + a_p.\overrightarrow{GA_p}$$

$$(2): (b_1 + b_2 + \dots + b_p) \overrightarrow{GG_2} = b_1.\overrightarrow{GB_1} + b_2.\overrightarrow{GB_2} + \dots + b_n.\overrightarrow{GB_n}$$

Le Barycentre

المرج

بجمع هاتين العلاقتين طرفاً بطرف نجد :

$$(a_1 + \dots + a_p) \overrightarrow{GG_1} + (b_1 + \dots + b_p) \overrightarrow{GG_2} = a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_p \overrightarrow{GA_p} + b_1 \overrightarrow{GB_1} + \dots + b_n \overrightarrow{GB_n} = \vec{0}$$

وهذا ما كان بوجدنا البرهنة عليه.

Barycentre de deux points

يمكن الحصول على علاقة مرجحية أخرى باعتبار النقطة O هي : A

$$(2): \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$$

(4) **استنتاج:** نستنتج من خلال العلاقة الأخيرة أن مرجح نقطتين مستقيمي مع هاتين النقطتين.

(5) **إنشاء المرجح:**

لإنشاء مرجح نقطتين نستعمل العلاقة الأخيرة (2).

مثال : مرجح النقطتين المتزنتين (A, -3) و (B, 2)

هي النقطة G التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$



IV. مرجح نقطتين :

(1) **تعريف 4:**

A و B نقطتان و a و b عدنان بحيث $a + b \neq 0$ توجد نقطة وحيدة G تحقق العلاقة المتجهية التالية :

$$a \overrightarrow{AG} + b \overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

النقطة G هي مرجح **النظمة المتزنة** $\{(A, a); (B, b)\}$

(2) **ملاحظة:** عندما يكون العدنان a و b متساويان فإن G يحقق العلاقة : $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{BG}$ وبالتالي تكون النقطة G هي منتصف القطعة [AB].

(3) **العلاقات المرجحية :**

بصفة عامة وحسب ما سبق ، مهما تكن النقطة O فإن :

$$(1): \overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b} (a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB})$$

Barycentre de trois points

وكذلك يمكن أن نبرهن بأن :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB'} \quad ; \quad \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$$

خلاصة: مركز ثقل المثلث ينتمي الى متوسط المثلث و يوجد على بعد ثلثي طول المتوسط انطلاقاً من رأس المثلث الموافق لهذا المتوسط.

(3) **خاصية:** متوسطات المثلث تتقاطع في نقطة وحيدة هي مركز ثقل المثلث.

برهان: بما أن G هو مرجح $\{(A, 1); (A', 2)\}$ ، إذن فإنه ينتمي الى المستقيم (A, A') ، وبالمثل فإن G ينتمي الى كل من

المستقيمين (B, B') و (C, C') وبالتالي فإن

G هو تقاطع متوسطات المثلث .

(5) **إنشاء المرجح:**

لإنشاء مرجح نقطتين نستعمل العلاقة الأخيرة (2).

مثال : مرجح النقط المتزنة (A, -2) و (B, 2) و (C, 1)

هي النقطة G التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

V. مرجح ثلاث نقط :

(1) **تعريف 4:**

A و B و C نقط و a و b و c أعداد حقيقية بحيث $a + b + c \neq 0$ توجد نقطة وحيدة G تحقق العلاقة المتجهية التالية :

$$a \overrightarrow{AG} + b \overrightarrow{BG} + c \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

النقطة G هي مرجح **النظمة المتزنة**

$$\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$$

(2) **خاصية:** عندما تكون الأعداد a و b و c متساوية فإن G هو مركز ثقل المثلث ABC أي مرجح النظمة $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$.

لتكن A' و B' و C' على التوالي منتصفات [BC] و [AC] و [AB].

بما أن A' هو مرجح $\{(B, 1); (C, 1)\}$ ، حسب تجميعية المرجح فإن

G هو مرجح $\{(A, 1); (A', 2)\}$ وبالتالي فإن

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$$

(4) **العلاقات المرجحية :**

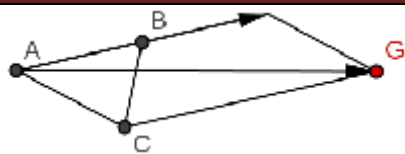
بصفة عامة وحسب ما سبق ، مهما تكن النقطة O فإن :

$$(1): \overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b+c} (a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC})$$

يمكن الحصول على علاقة مرجحية أخرى باعتبار النقطة O هي A :

Le Barvcentre

المرج



$$(2): \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$$

Coordonnées barycentriques

VI. الإحداثيات المرجحية :

(2) حالة ثلاث نقط :

المستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

النقطة G هي مرجح النظم المتزنة

$$\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$$

بصفة عامة وحسب ما سبق ، لدينا :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b+c} (a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC})$$

ومنه نستنتج إحداثيات النقطة G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{a+b+c} (ax_A + bx_B + cx_C) \\ x_G = \frac{1}{a+b+c} (ax_A + bx_B + cx_C) \end{cases}$$

(1) حالة نقطتين :

المستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

النقطة G هي مرجح النظم المتزنة

$$\{(A, a); (B, b)\}$$

بصفة عامة وحسب ما سبق ، لدينا :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b} (a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB})$$

ومنه نستنتج إحداثيات النقطة G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{a+b} (ax_A + bx_B) \\ x_G = \frac{1}{a+b} (ax_A + bx_B) \end{cases}$$