

الاشتقاق ودراسته الدوال

I - قابلية الاشتقاق :

1. قابلية الاشتقاق في نقطة :

f دالة معرفة على مجال مركزه f . قابلية للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي A بحيث : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ ونكتب $f'(x_0) = A$ ويسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 .

2. قابلية الاشتقاق على اليمين :

f دالة معرفة على مجال $[x_0; x_0 + \alpha[$. قابلية للاشتقاق على يمين x_0 إذا كانت للدالة نهاية منتهية على يمين x_0 ويرمز لها بالرمز $f'_d(x_0)$.

3. قابلية الاشتقاق على اليسار :

f دالة معرفة على مجال $]x_0 - \alpha; x_0]$. قابلية للاشتقاق على يسار x_0 إذا كانت للدالة تقبل نهاية على يسار x_0 ويرمز لها بالرمز $f'_g(x_0)$.

4. قابلية الاشتقاق على مجال .

f دالة معرفة على مجال I .

f قابلية للاشتقاق على المجال I إذا وفقط إذا كانت قابلية للاشتقاق على جميع نقاط I
 f قابلية للاشتقاق على $[a; b]$ إذا كانت قابلية للاشتقاق على $]a; b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .

-ملاحظة : تكون f قابلية للاشتقاق في نقطة

x_0 إذا كانت قابلية للاشتقاق على يمين x_0 وعلى

يسار x_0 وكان لدينا : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$



II - التأويل الهندسي للعدد المشتق :

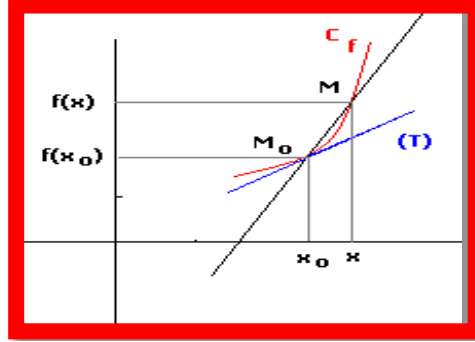
الدالة المعرفة بما يلي $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التاليفية

المماسّة لـ C_f بجوار x_0 .

المستقيم ذو المعادلة: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يسمى مستقيم مماس للمنحنى

C_f عند النقطة $A(x; f(x_0))$. العدد $f'(x_0)$ يسمى **المعامل الموجه أو العدد**

المشتق .

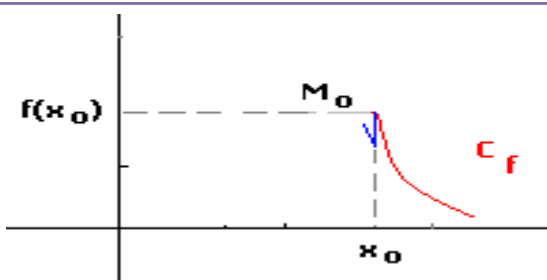


التأويلات الهندسية لقابلية الاشتقاق

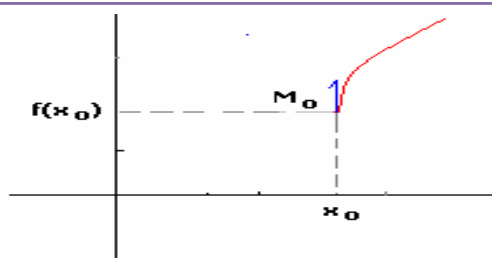
دراسة قابلية الاشتقاق	التأويل الهندسي للنتيجة المحصلة
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$	(C_f) له نصف مماس أفقي على يمين النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$	(C_f) له نصف مماس مائل على يمين النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامل الموجه a $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى



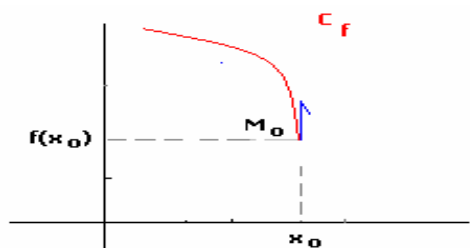
(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين
 $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل



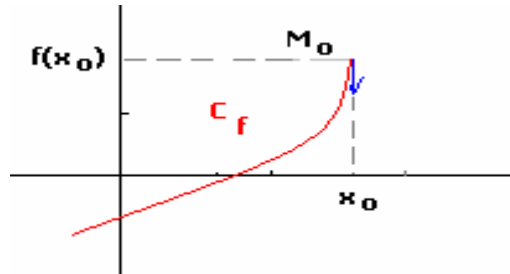
(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين
 $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى



(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار
 $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى



(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار
 $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل



III - الاشتقاق والاتصال:

كل دالة قابلة للاشتقاق في نقطة هي دالة متصلة والعكس غير صحيح بصفة عامة

IV - الكتابة التفاضلية:

إذا كان $y = f(x)$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I فإننا نكتب اصطلاحاً $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dx$ هذه الكتابة تسمى الكتابة التفاضلية

V - مشتقة مركب دالتين:

1. f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$. فإن الدالة $g \circ f$ قابلة

للاشتقاق في x_0 و $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$

2. f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن الدالة $g \circ f$

قابلة للاشتقاق على المجال I و $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f(x)) \times f'(x)$ ($\forall x \in I$)



VI- مشتقة الدالة العكسية :

1. f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فان الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$

$$\text{ولدينا : } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2. f قابلة للاشتقاق على المجال I و $f'(x) \neq 0$ لكل x من المجال I فان f^{-1}

$$\text{قابلة للاشتقاق على المجال } f(I) \text{ } (\forall y \in f(I); (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \cdot f'(I))$$

VII- جدول الدوال المشتقة لـ دوال الاعتيادية

الدالة f مشتقتها	الدالة f
$f' + g'$	$f + g$
kf'	kf
$f'g + fg'$	$f \times g$
$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
$\frac{g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}; f > 0$
$nf' f^{n-1}$	$f^n; (n \in \mathbb{N}^*)$
0	a
1	x
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{f}$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$af'(ax+b)$	$f(ax+b)$
$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

VIII - المشتقة ومنحنى التغيرات :

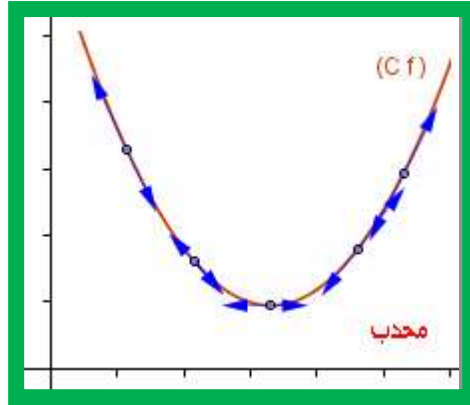
f قابلة للاشتقاق على مجال I ومشتقتها هي $f'(x)$:

1. إذا كان $f'(x) > 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة **تزايدية**.
2. إذا كان $f'(x) < 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة **تناقصية**.
3. إذا كان $f'(x) = 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة **ثابتة**.

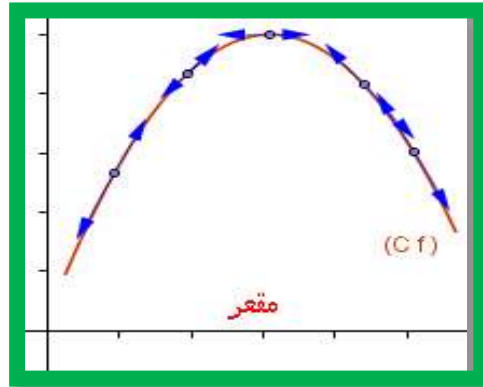
IX - تحدب - تقعر - نقطة انعطاف :

f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ($f''(x)$)

1. إذا كان $f''(x) > 0$ على المجال I فإن (C_f) منحنى **محدب**.



2. إذا كان $f''(x) < 0$ على المجال I فإن (C_f) منحنى **مقعر**.

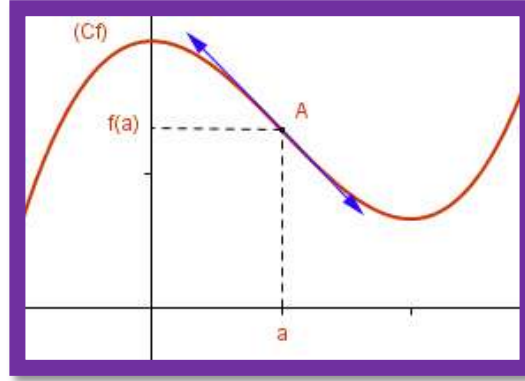


3. إذا كان $f''(x) = 0$ على المجال I فإن (C_f) يقبل **نقطة انعطاف**.

.....
 + إذا انعدمت f' في x_0 وغيّرت إشارتها بجوار x_0 نتكلم عن **مطراف دالة**
 (قيمة قصوى أو قيمة دنيا) .



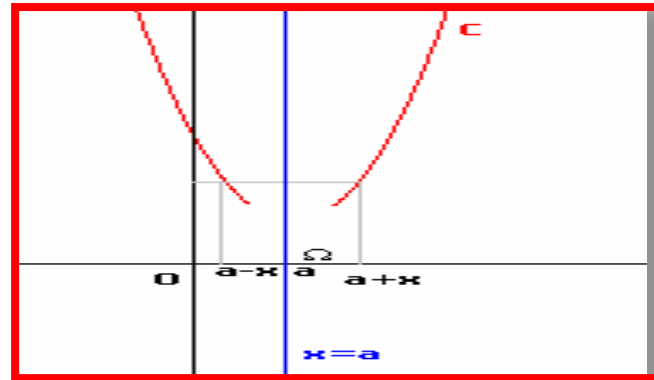
✚ إذا انعدمت " f في x_0 وغيرت إشارتها بجوار x_0 تتكلم عن نقطة انعطاف



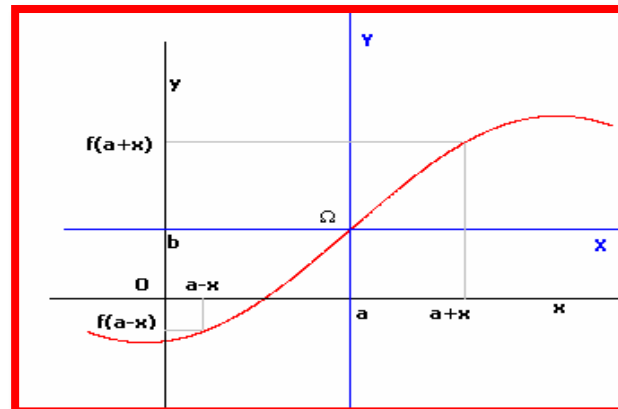
X- محور تماثل . مركز تماثل

f . دالة معرفة على D_f وليكن (C) في م.م.م .

1. المستقيم $x = a$ محور تماثل المنحنى إذا تحقق : $f(2a - x) = f(x)$



2. النقطة $\Omega(a; b)$ مركز تماثل المنحنى إذا تحقق : $f(2a - x) + f(x) = 2b$

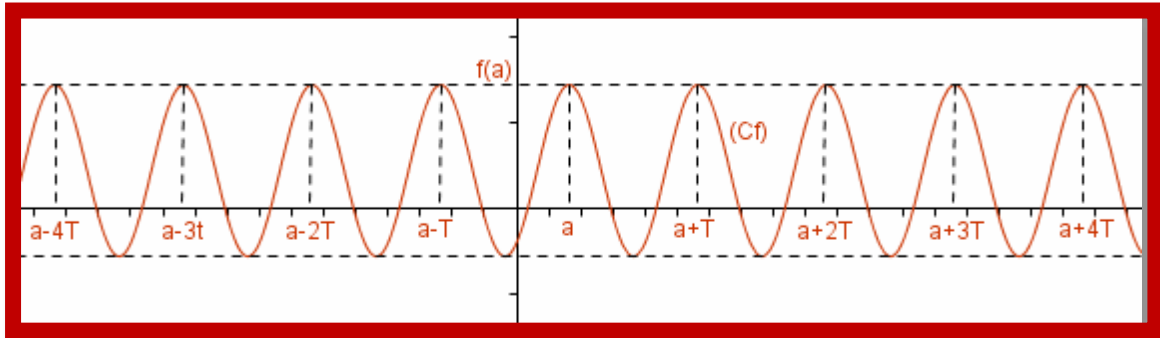
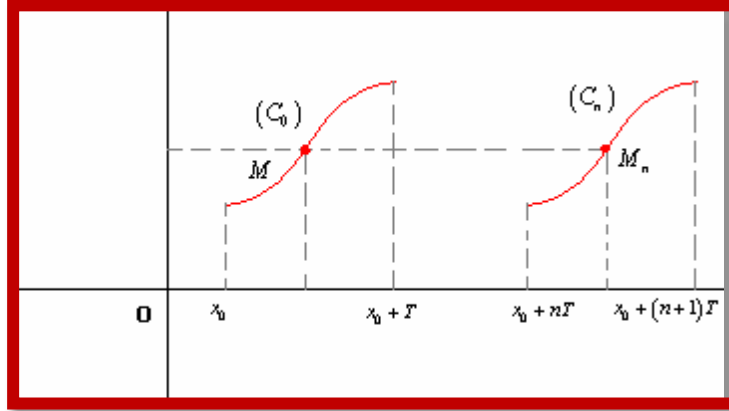


XI - دالة دورية

f . دالة عددية و D_f حيز تعريفها . f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T بحيث :

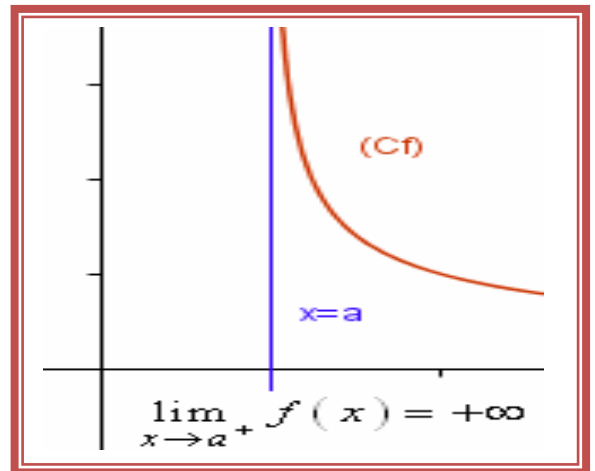
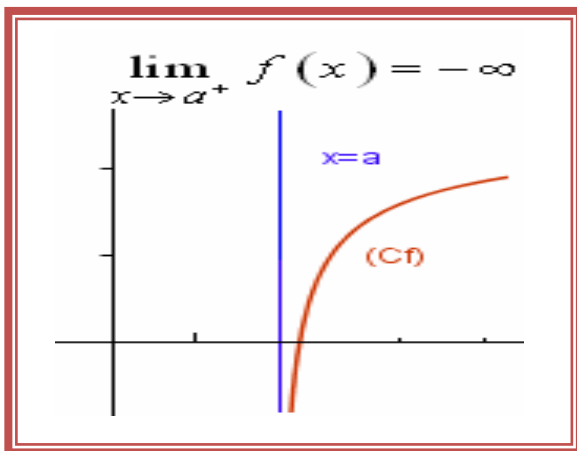
$$f(x+T) = f(x); (x-T) \in D_f; (x+T) \in D_f; \forall x \in D_f$$

العدد T يسمى دور الدالة f واصغر دور موجب يسمى دور الدالة



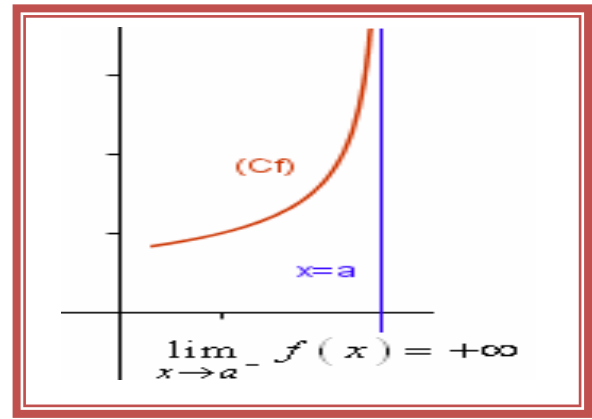
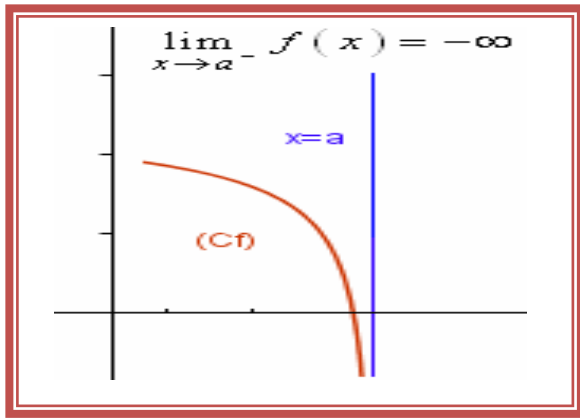
XII الفروع الانهائية :

1. إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ المستقيم $x = a$ مقارب رأسي.

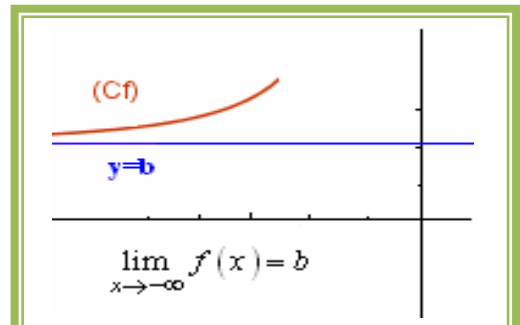
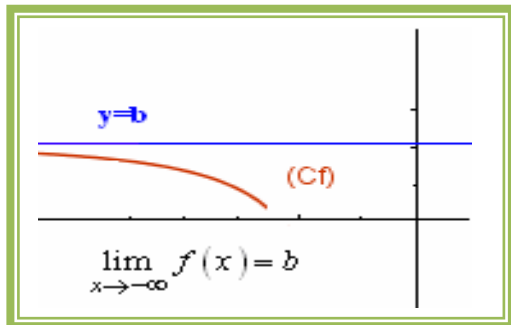
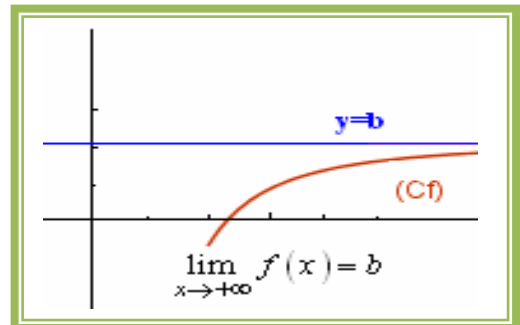
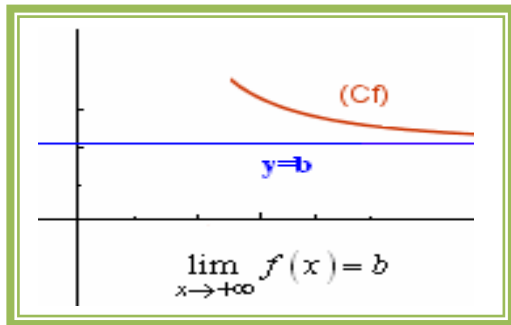


www.bramaths.com

Brahim Ajghaier



2. إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ المستقيم $y = b$ مقارب أفقي.



3. إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ لنحسب: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الارتفاع.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الافاصل.

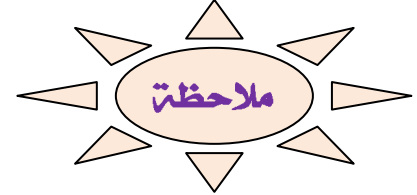


إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ فلنحسب: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax$

* إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = 0$ $\Leftarrow (C_f)$ يقبل فرع شلجيمي في اتجاه

المستقيم $y = ax$

* $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$ $\Leftarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل



دراسة إشارة $f(x) - (ax + b)$ تمكنا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل

