

تحليل الهندسة الفضائية

القدرات المنتظرة

التمكن من قواعد الحساب المتجهي. التعرف والتعبير على استقامية متجهتين. التعرف والتعبير على استوائية ثلاث متجهات. تطبيق الاستقامية والاستوائية في حل مسائل هندسية ترجمت مفاهيم وخصائص الهندسة التاليفية والهندسة المتجهية بواسطة الاحداثيات. البرهنة على استقامة متجهتين. البرهنة على استوائية ثلاث متجهات. اختيار التمثيل المناسب (ديكارتي أو بارامترى) لدراسة الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات وفي تأويل النتائج

A- متجهات الفضاء les vecteurs de l'espace

1. تعاريف ومصطلحات

- كل نقطتا نيت A و B من الفضاء تحدد متجه $\overrightarrow{AB}$ أصلها A وطرفها B . إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{U}$ فإن: * اتجاه $\vec{U}$ هو المستقيم (AB)

* منحنى $\vec{U}$ هو المنحنى من A إلى B

* منظم $\vec{U}$ هي المسافة AB ونكتب $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ تسمى المتجهة المنعدمة. ونكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا تحقق أن لهما نفس المنظم ونفس الاتجاه ونفس المنحنى



- إذا كان $\overline{AB} = \overline{CD}$ فإن النقط A و B و C و D نقط مستوائيت

(لان حاملهما متوازيان . وكذلك الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع)

2. جمع متجهتين من V_3

- جميع خصائص جمع متجهتين في V_3 تبقى صحيحة في V_3

* التبادلية: $\overline{U} + \overline{V} = \overline{V} + \overline{U}$ * التجميعية: $\overline{U} + (\overline{V} + \overline{W}) = (\overline{U} + \overline{V}) + \overline{W}$

* متجهة منعدمة: $\overline{U} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{U} = \overline{U}$ * مقابل متجهة: $\overline{U} - \overline{U} = -\overline{U} + \overline{U} = \overline{0}$

3. ضرب متجهة في عدد حقيقي

$$\alpha(\overline{U} + \overline{V}) = \alpha\overline{U} + \alpha\overline{V}$$

$$(\alpha + \beta)\overline{U} = \alpha\overline{U} + \beta\overline{U}$$

$$\alpha(\beta\overline{U}) = (\alpha\beta)\overline{U}$$

- ضرب متجهة في عدد حقيقي هو متجهة

- جميع قواعد الحساب في V_2 تبقى صالحة في V_3

4. المتجهات المستقيمة - المتجهات المستوائيت

أ- المستقيم المتجهي

لتكن $\overline{U}$ متجهة غير منعدمة و α عدد حقيقي $\overline{V} \in V_3 / \overline{V} = \alpha\overline{U}$ تسمى **المستقيم**

المتجهي ونرمز له ب $D_{\overline{U}}$

لدينا $\overline{U}$ أساس $D_{\overline{U}}$ ومنه نقول إن بعد $D_{\overline{U}}$ يساوي 1 ($\dim D_{\overline{U}} = 1$)

كل مستقيم (D) في الفضاء يحدد بنقطتين A و M متجهة موجهة غير منعدمة $\overline{U}$ ويكون

بدلك المستقيم (D) هو مجموعة النقط M بحيث $\overline{AM}$ و $\overline{U}$ مستقيمتان

ب- المستوى المتجهي لتكن $\overline{U}$ و $\overline{V}$ متجهتين غير منعدمتين من V_3

• إذا وجد α و β من $\mathbb{R}$ بحيث $\alpha\overline{U} + \beta\overline{V} = \overline{0}$ ($\alpha = \beta = 0$) فإن $\overline{U}$ و $\overline{V}$ متجهتان غير

مستقيمتان



• اذا وجد α و β من IR بحيث $\alpha\vec{U} + \beta\vec{V} = \vec{0}$ ($\alpha \neq 0; \beta \neq 0$) فان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متجهتان غير مستقيمتان

• لتكن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متجهتين غير مستقيمتين . المجموعة $\vec{W} \in V_3 / \vec{W} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{V} (\alpha, \beta) \in IR$ تسمى بالمستوى المتجهي الذي أساسه الزوج $(\vec{U}; \vec{V})$ يرمز له V_2 ب ولدينا $\dim V_2 = 2$

ج- متجهات مستوائية

كل متجهتين من V_3 فهما مستوائيتان

- إذا كانت مستقيمية (فحاملهما متوازيان وبالتالي يحددان مستوى)
- إذا كانت غير مستقيمية (فحاملهما متقاطعان اذن يحددان مستوى)
- أما كل ثلاث متجهات من V_3 قد تكون مستوائية أو غير مستوائية

B تحليلية الفضاء Analytique de l'espace

1. المعلم والأساس في الفضاء

لتكن ثلاث متجهات مستوائية . ولتكن M نقطة من الفضاء . مهما تكن M من الفضاء توجد x و y و z من IR بحيث $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- العدد x يسمى **أفصول** . العدد y يسمى **ارتوب** . العدد z يسمى **انسوب**

- المتلوث $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ يسمى **أساس** في الفضاء V_3

- الرباعي $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ يسمى **معلم ديكارتي** في الفضاء

- متلوث **إحداثيات** المتجهة $\vec{U}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ يكتب على شكل

$$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{أو} \quad \vec{U}(x; y; z) \quad \text{وكذلك} \quad \vec{U} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- **إحداثيات متجهة** $\vec{AB}$ حيث $A(x; y; z); B(x'; y'; z')$ هو المتلوث $\vec{AB}(x - x'; y - y'; z - z')$

- **إحداثيات منتصف قطعة**: I منتصف القطعة $[AB]$ $I\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z-z'}{2}\right)$



II. استقامية متجهتين - استوائية ثلاث متجهات

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممتثل $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1. استقامية متجهتين

أ - المحددات المستخرجة

لتكن $\vec{U}(a; b; c)$ و $\vec{V}(a'; b'; c')$ من الفضاء. المحددات التالية $d_1 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ و $d_2 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ و

$d_3 = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ تسمى المحددات المشتقة المستخرجة ل $\vec{U}$ و $\vec{V}$

ب خاصية

- تكون $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متجهتين مستقيمتين إذا وفقط إذا كانت $d_1 = d_2 = d_3 = 0$
- تكون $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متجهتين غير مستقيمتين إذا كانت $d_1 \neq 0$ أو $d_2 \neq 0$ أو $d_3 \neq 0$

2. استوائية ثلاث متجهات

خاصية: لتكن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ ثلاث متجهات من الفضاء

* $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ متجهات مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{W}) = 0$

* $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ متجهات غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{W}) \neq 0$

$$\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{W}) = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

III-المستقيم في الفضاء

1. التمثيل البارامترى للمستقيم نعتبر المستقيم $D(A; \vec{U})$ حيث $A(x_0; y_0; z_0)$ و

$\vec{U}(a; b; c)$

$$\left(\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (D) \right) (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{U}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases} \quad \text{أي التمثيل البارامترى للمستقيم هو}$$



2. معادلتان ديكارتيتان لمستقيم

نعتبر المستقيم $D(A; \bar{U})$ مهما تكن $M(x; y; z)$ من المستقيم (D) فان المتجهتين $\bar{U}$ و $\overline{AM}$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \\ z - z_0 & c \end{vmatrix} = 0$$
 مستقيمتين أي أن **المحددات المستخرجة المرتبطة بهانعدمتة**

* إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ فان النظام $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ تسمى **معادلتان**

ديكارتيتان للمستقيم (D)

* إذا انعدمت احد الاحداثيات انعدم البسط المرافق لها مثلا $a = 0$ فان المعادلتان

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
 الديكارتيتان هما

* إذا انعدمت احدائيتين $(a = b = 0 \text{ و } c \neq 0)$ فان $\begin{cases} y = y_0 \\ x = x_0 \end{cases}$ تسمى **معادلتين ديكارتيتين**

للمستقيم

IV- المستوى في الفضاء

1. التمثيل البارامترى للمستوى

نعتبر المستوى $P(A; \bar{U}; \bar{V})$ حيث $\bar{V}(a'; b'; c'); \bar{U}(a; b; c); A(x_0, y_0, z_0)$ مهما تكن

$M(x; y; z)$ من المستوى (P) فان المتجهات $\overline{AM}$ و $\bar{U}$ و $\bar{V}$ مستوائيّة

$$\left(\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P) \right) \left(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \right) \Rightarrow \overline{AM} = \alpha \bar{U} + \beta \bar{V}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$$

ادن **التمثيل البارامترى للمستوى (P) هو**

2. معادلة ديكارتية لمستوى

نعتبر المستوى $P(A; \bar{U}; \bar{V})$ حيث $\bar{V}(a'; b'; c'); \bar{U}(a; b; c); A(x_0, y_0, z_0)$ مهما تكن

$M(x; y; z)$ من المستوى (P) فان المتجهات $\overline{AM}$ و $\bar{U}$ و $\bar{V}$ مستوائيّة أي

$\det(\bar{U}; \bar{V}; \overline{AM}) = 0$. بعد حساب المحددة نجد معادلة ديكارتية للمستوى التي

تكتب بدورها على شكل $ax + by + cz + d = 0$

٧-الأوضاع النسبية لمستقيمات ومستويات الفضاء

1. الوضع النسبي لمستقيمين

نعتبر المستقيمين $D(A; \vec{U})$ و $D'(A'; \vec{V})$

- إذا كان $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ فإن $(D) // (D')$
 - إذا كان $d_1 \neq 0$ أو $d_2 \neq 0$ أو $d_3 \neq 0$ فإن (D) لا يوازي (D')
 - **ملاحظة** (D) لا يوازي (D') يعني أن (D) و (D') متقاطعان أو غير مستوائيان
- في البحث عن التقاطع إذا كان للنظمتة المشتركة للمستقيمين **حل** نقول أن (D) و (D') **متقاطعان** وإذا لم يكن للنظمتة **حل** نقول أن (D) و (D') **غير مستوائيان**

2. الوضع النسبي لمستقيم ومستوى

نعتبر $D(A; \vec{U})$ و $P(B; \vec{V}; \vec{W})$

- إذا كان $(P) // (D) \Leftrightarrow \det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{W}) = 0$
- إذا كان $\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{W}) \neq 0$ فإن (D) **يخترق** المستوى (P)

3. الوضع النسبي لمستويين

ليكن $P(A; \vec{U}; \vec{V})$ و $P'(B; \vec{U}'; \vec{V}')$

- إذا كان $\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{U}') = 0$ و $\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{V}') = 0$ فإن $(P) // (P')$
 - إذا كان $\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{U}') \neq 0$ أو $\det(\vec{U}; \vec{V}; \vec{V}') \neq 0$ فإن (P) لا يوازي (P')
 - إذا كان المستويين معرفين بمعادلتيهما الديكارتيّة
 $(P): ax + by + cz + d = 0$
 $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$
- إذا تحقق $ab' - a'b = 0$ و $bc' - cb' = 0$ و $ac' - a'c = 0$ فإن $(P) // (P')$
- إذا كان $ab' - a'b \neq 0$ أو $bc' - cb' \neq 0$ أو $ac' - a'c \neq 0$ فإن (P) لا يوازي (P')

