

المتتاليات العددية les suites numeriques

القدرات المنتظرة

ينبغي تقريب المتتالية بتقنيات حساب الحدود والتمييز بين الحد العام والحدود الأخرى. كذلك التمييز بين المتتالية الصريحة والمرجعية. استحضار البرهان بالترجع ومدى دلالاته في تحديد مكبورة ومصغورة ومحدودة. دراسة تقريبية لمفهوم الرقابة. وكذا المتتالية الحسابية والهندسية ومختلف مميزاته من تحديد الأساس وصيغة الحد العام والحدود المتتابة والمجموع

1. تعاريف ومصطلحات

نشاط 1 :

نعلم أن كل عدد زوجي يكتب على شكل $n = 2k$ مع $(k \in \mathbb{N})$

1. اكتب خمس أعداد زوجية متتابة
 2. إذا رمزنا للعدد الأول بـ U_0 وللعدد الثاني بـ U_1 ... حدد رتبة U_5
 3. حدد قيمة الحدود U_7 و U_{20} ثم U_{2011}
- $U_n = 2k$ يسمى الحد العام للمتتالية

1. تعريف

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من I نحو $\mathbb{R}$ حيث $I \subset \mathbb{N} ()$

$$U : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto U(n) \end{cases}$$

$U(n)$ صورة العدد الطبيعي n بـ U يكتب باختصار U_n ويسمى الحد العام للمتتالية العددية (ونقرأ U مدل n)



2. أمثلة

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = 2V_n + 1 \end{cases} \text{ و } U_n = \frac{2n+1}{n+1} \text{ نعتبر المتتاليتين العدديتين: } (n \in \mathbb{N})$$

1. احسب U_1 و U_5 ثم U_{2012}

2. احسب V_1 و V_2 ثم V_3

ملاحظة

* المتتالية V_n تسمى متتالية مرجعية

* المتتالية U_n تصنف من بين المتتاليات المحددة بالصيغة الصريحة لحددها العام U_n بدلالة n

1. نعتبر المتتالية العددية بحيث $(n \in \mathbb{N})$: $\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = \sqrt{2+W_n} \end{cases}$ احسب W_1 و W_2 ثم W_3

ماذا تلاحظ

W_n تسمى متتالية ثابتة

المتتالية مكبورة - مصفورة - محدودة

1 تعاريف

- نقول إن متتالية $(U_n)_{n \in I}$ مكبورة إذا وجد عدد حقيقي a بحيث $U_n \leq a$ لكل n من I
 - نقول إن متتالية $(U_n)_{n \in I}$ مصفورة إذا وجد عدد حقيقي b بحيث $U_n \geq b$ لكل n من I
 - نقول إن متتالية محدودة إذا كانت مكبورة ومصفورة
- (غالباً نستعمل البرهان بالترجع)

2 دراسة أمثلة

$$1- \text{ نعتبر المتتالية } (U_n) \text{ المعرفة بما يلي } \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + 1) \end{cases} (n \in \mathbb{N})$$

بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 1$

ب- لتكن المتتالية العددية بحيث $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n^2 + 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$ بين أن

$$0 < U_n < 1$$



III. رتبة متتالية عددية

نشاط 1

نعتبر المتتالية العددية بحيث $U_n = n^2$
 1. احسب U_1 و U_2 ثم U_3 . 2. احسب U_{n+1} بدلالة n ثم احسب $U_{n+1} - U_n$
 3. ماذا تستنتج

www.bramaths.com

Brahim Ajghaider

أ- خاصية

نعتبر (U_n) متتالية عددية غير منتهية
 - (U_n) متتالية **تزايدية** إذا كان $U_{n+1} - U_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$
 - (U_n) متتالية **تناقصية** إذا كان $U_{n+1} - U_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$
 - نقول إن (U_n) متتالية **رتيبة قطعاً** إذا كانت إما تزايدية أو تناقصية قطعاً

ب- تطبيقات

(U_n) متتالية عددية معرفة بما يلي: $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = U_n(U_n + 1)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)
 1. احسب U_1 و U_2
 2. تحقق أن (U_n) تزايدية ثم استنتج $U_n \geq 1$

IV. المتتالية الحسابية

1. تعريف

نقول إن متتالية (U_n) **حسابية** إذا وجد عدد حقيقي r بحيث $U_{n+1} - U_n = r$ لكل n من $\mathbb{N}$ العدد الحقيقي r (غير مرتبط بـ n) يسمى **أساس** المتتالية الحسابية (U_n)

أ - ملاحظة

- إذا كان $r \geq 0$ فإن المتتالية (U_n) تزايدية . - إذا كان $r \leq 0$ فإن المتتالية (U_n) تناقصية

ب تطبيق

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{4U_n - 9}{U_n - 2}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ونضع $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$. بين أن V_n متتالية حسابية



www.bramaths.com

Brahim Ajghaider

2 صيغة الحد العام لمتتالية حسابية

(U_n) متتالية حسابية أساسها r ($r \in \mathbb{R}^*$) وحدها الأول U_0

$$U_{n+1} - U_n = r$$

$$U_{n+1} = U_n + r$$

$$U_1 = U_0 + r$$

$$U_2 = U_1 + r = U_0 + 2r$$

خاصية:

ب-نتيجة: إذا كانت (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U وأساسها r فإن صيغة الحد

العام هي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n = U_0 + nr$

ج-ملاحظة: (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_k فإن ص.ح.ع. $U_n = U_k + (n-k)r$

3. حدود متتابعة لمتتالية حسابية

تمهيد: نعتبر متتالية حسابية أساسها r . لنقارن بين الحدود المتتالية U_n و U_{n-1}

$$U_n = U_{n-1} + r$$

$$U_{n+1} = U_n + r$$

$$U_{n+1} - U_n = U_n - U_{n-1} \quad \text{لدينا}$$

$$U_{n+1} + U_{n-1} = 2U_n$$

خاصية: a و b و c حدود متتابعة لمتتالية حسابية إذا تحقق $a + c = 2b$

4. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

خاصية: إذا كانت (U_n) متتالية حسابية فإن

$$U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n+1) \frac{(U_0 + U_n)}{2}$$



A. لتكن (U_n) متتالية الأعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية . نضع

$$U_0 = 0; U_1 = 2; U_2 = 4; \dots$$

1. بين أن المتتالية (U_n) حسابية

2. احسب مجموع الحدود المائة لهذه المتتالية

B. لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها 2- وحدها الأول $U_0 = 4$

احسب المجموع $U_7 + U_8 + \dots + U_{25}$

٧- المتتالية الهندسية

1- تعريف

نقول إن (U_n) متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث $U_{n+1} = qU_n$ لكل n من $(\mathbb{N})$ العدد الحقيقي q غير مرتبط ب n يسمى أساس المتتالية (U_n)

مثال

لتكن متتالية عددية بحيث $U_0 = -\frac{3}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{2}{U_n - 1}$ كما نضع

$V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). بين أن V_n متتالية هندسية محدد عناصرها المميزة

2. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية

$$U_1 = qU_0$$

$$U_2 = qU_1 = q(qU_0) = q^2U_0$$

$$U_3 = qU_2 = q(q^2U_0) = q^3U_0 \quad q \text{ أساسها } U_0 \text{ وحدها الأول } U_0 \text{ وأساسها } q$$

$\vdots$

$$U_n = q^n U_0$$



إذا كانت (U_n) م. ه. حدها الأول U_0 وأساسها q فإن $(\forall n \in \mathbb{N}): U_n = U_0 q^n$

ملاحظة: إذا كانت (U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_k وأساسها q فإن $U_n = U_k q^{n-k}$

3. حدود متتابعة لمتتالية هندسية

خاصية a : و b و c حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا تحقق $ac = b^2$

4. صيغة المجموع لمتتالية هندسية

إذا كانت (U_n) متتالية هندسية أساسها q ($q \neq 1$) فصيغة المجموع $S_n = U_0 + \dots + U_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$



www.bramaths.com

Brahim Ajghaider

