

الاشتقاق

1 - قابلية الاشتقاق :

1. قابلية الاشتقاق في نقطة :

f دالة معرفة على مجال مركزه x_0 . f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي A

بحيث : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ ونكتب $f'(x_0) = A$ ويسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 .

2. قابلية الاشتقاق على اليمين :

f دالة معرفة على مجال $[x; x_0 + \alpha[$. f قابلة للاشتقاق على اليمين x_0 إذا كانت

للدالة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية منتهية على يمين x_0 ويرمز لها بالرمز $f'_d(x_0)$.

3. قابلية الاشتقاق على اليسار :

f دالة معرفة على مجال $]x_0 - \alpha; x_0]$. f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كانت

الدالة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تقبل نهاية على يسار x_0 ويرمز لها بالرمز $f'_g(x_0)$

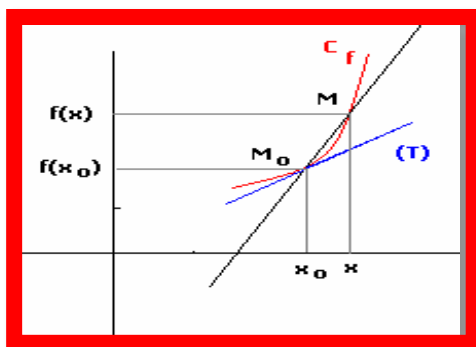
التمرين 1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في x_0 كل حالة من الحالات التالية

1. $x_0 = -2$; $f(x) = \frac{-3}{x}$ 2. $x_0 = 1$; $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 3. $x_0 = -1$; $f(x) = x - \frac{1}{x}$



4 - التأويل الهندسي للعدد المشتق :

- الدالة المعرفة بما يلي $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التاليفية المماسّة لـ C_f بجوار x_0 .
- المستقيم ذو المعادلة: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يسمى مستقيم مماس للمنحنى C_f عند النقطة $A(x; f(x_0))$. العدد $f'(x_0)$ يسمى المعامل الموجه أو العدد المشتق



التمرين 2 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في x_0 كل حالة من الحالات التالية وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة

$$1. \quad x_0 = 1; f(x) = 2x^2 + x - 1 \quad 2. \quad x_0 = -1; f(x) = 3x^2 + 2$$

5. قابلية الاشتقاق على مجال .

f دالة معرفة على مجال I .

f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على جميع نقط I

f قابلة للاشتقاق على $[a; b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a; b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .

ملاحظة : تكون f قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 إذا كانت قابلة للاشتقاق على يمين x_0

وعلى يسار x_0 وكان لدينا : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

- كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

- الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق على حيز تعريفها



دراسة قابلية الاشتقاق	التأويل الهندسي للنتيجة المحصلة
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$	له نصف مماس أفقي على يمين (C_f) النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$	له نصف مماس مائل على يمين (C_f) معامله الموجه $A(x_0; f(x_0))$ النقطة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	له نصف مماس عمودي على يمين (C_f) موجه نحو الأعلى $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	له نصف مماس عمودي على يمين (C_f) موجه نحو الأسفل $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	له نصف مماس عمودي على يسار (C_f) موجه نحو الأسفل $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	له نصف مماس عمودي على يسار (C_f) موجه نحو الأعلى $A(x_0; f(x_0))$

$$\begin{cases} f(x) = -x + \frac{2}{x}, x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}, x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي:

التمرين 3

ادرس قابلية الاشتقاق الدالة f في 1



التمرين 4 دالة عددية بحيث:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x \leq 0 \\ g(x) = x\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

ا- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب- ادرس قابلية الاشتقاق في الصفر وأعط تأويلا للنتيجة المحصلة.

التمرين 5 نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}$$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f . 2. بين أن قابلية للاشتقاق في الصفر

3. حدد معادلة المماس للمنحنى في النقطة 0

التمرين 6 لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - 1 & ; x \geq 1 \\ f(x) = 2 - \sqrt{x+3} & ; x < 1 \end{cases}$$

1. بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 . 2. بين أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

التمرين 7 لتكن f دالة بحيث

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f . 2. ادرس قابلية الاشتقاق في 1 وأول النتيجة هندسيا

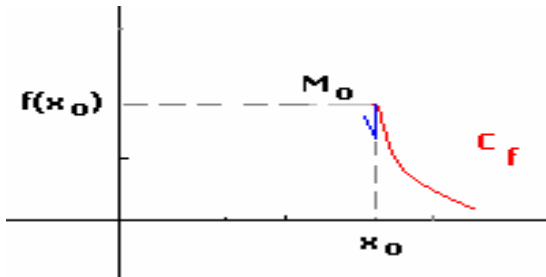


التمرين 8 g دالة ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بما يلي

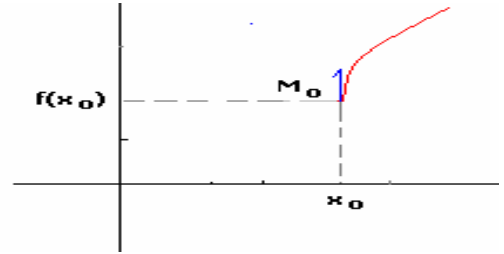
$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x$$

1. حدد D_g مجموعة تعريف الدالة g .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة g على اليمين في 2 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة.
3. ادرس قابلية اشتقاق الدالة g على اليسار في 2- وأول النتيجة المحصلة.

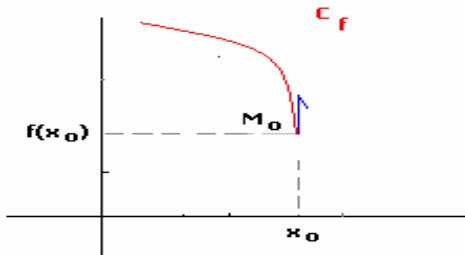
(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين
 $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل



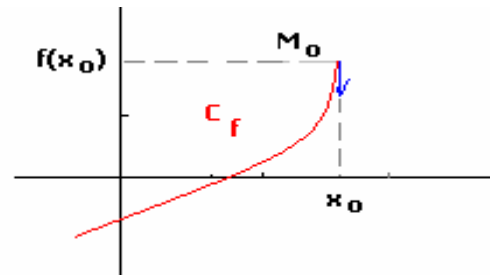
(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين
 $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى



(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار
 $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى



(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار
 $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل



➡ **II - الدالة المشتقة** لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I . الدالة المشتقة للدالة f

هي الدالة التي يرمز لها بـ f' والمعرفة كما يلي $f' : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$



جدول مشتقات الدوال الاعتيادية

الدالة f	الدالة f مشتقاتها
$f + g$	$f' + g'$
kf	kf'
$f \times g$	$f'g + fg'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\sqrt{f}; f > 0$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f^n; (n \in \mathbb{N}^*)$	nf'^{n-1}
a	0
x	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x)$
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$
$\frac{ax + b}{cx + d}$	$\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

III - المشتقة ومنحنى التغيرات :

f قابلة للاشتقاق على مجال I ومشتقتها هي $f'(x)$:

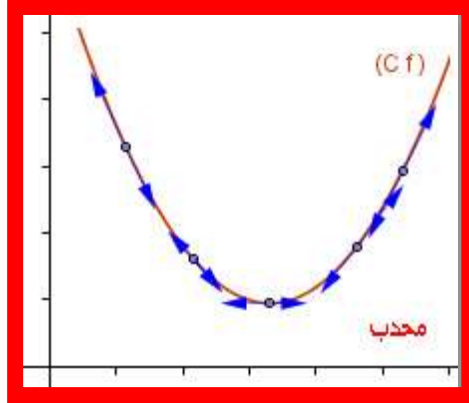
1. إذا كان $f'(x) > 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة تزايدية .
2. إذا كان $f'(x) < 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة تناقصية .
3. إذا كان $f'(x) = 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة ثابتة .

دراسة الدوال

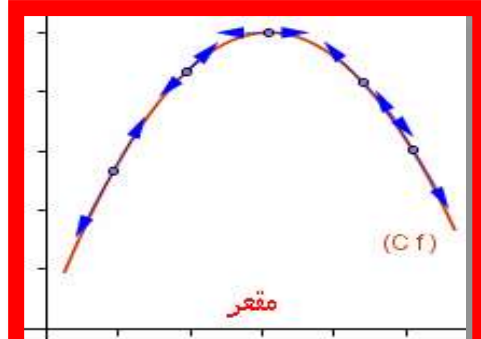
I - تحدب . تقعر . نقطة انعطاف :

f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ($f''(x)$)

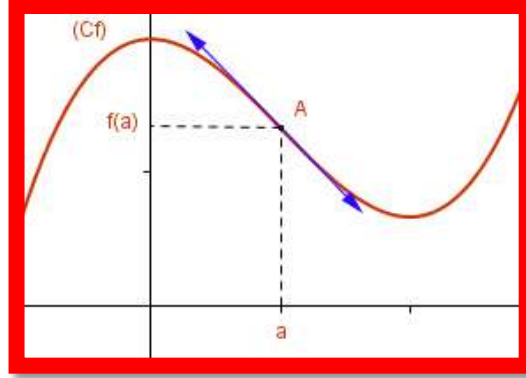
1. إذا كان $f''(x) > 0$ على المجال I فإن (C_f) منحنى محدب .



2. إذا كان $f''(x) < 0$ على المجال I فإن (C_f) منحنى مقعر .



3 - إذا كان $f''(x) = 0$ على المجال فان (C_f) يقبل نقطة انعطاف .



ملاحظة :

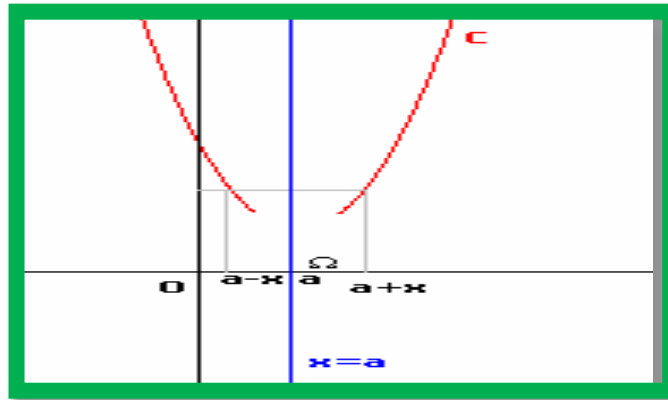
* إذا انعدمت f' في x_0 وغيرت إشارتها بجوار x_0 نتكلم عن مطراف دالة (قيمة قصوى أو قيمة دنيا) .

* إذا انعدمت f'' في x_0 وغيرت إشارتها بجوار x_0 نتكلم عن نقطة انعطاف .

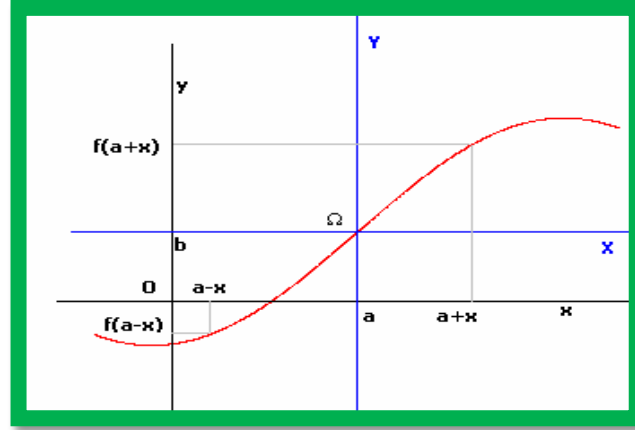
II - محور تماثل / مركز تماثل

f . دالة معرفة على D_f و (C) م.م.م

1. المستقيم $x = a$ محور تماثل المنحنى إذا تحقق : $f(2a - x) = f(x)$



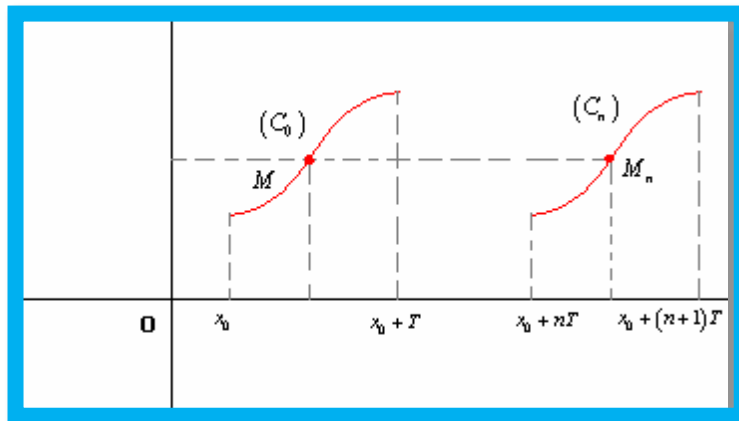
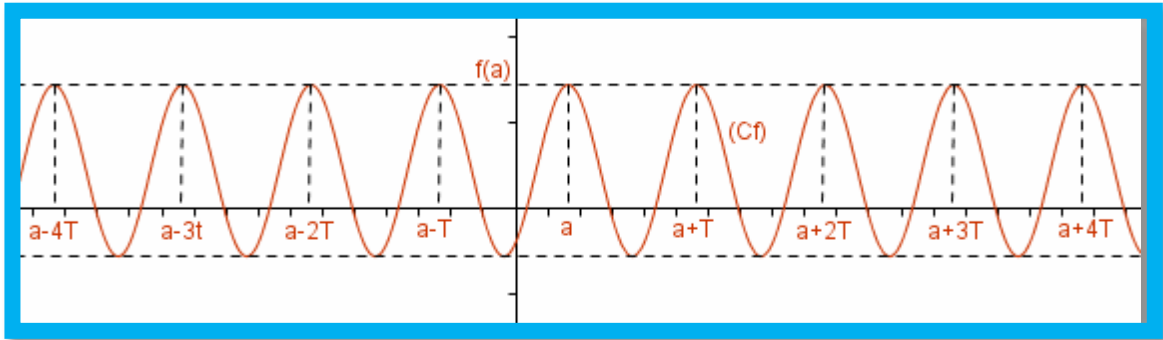
2. النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل المنحنى إذا تحقق: $f(2a-x) + f(x) = 2b$



III - دالة دورية: f دالة عددية و D_f حيز تعريفها. f دالة دورية إذا

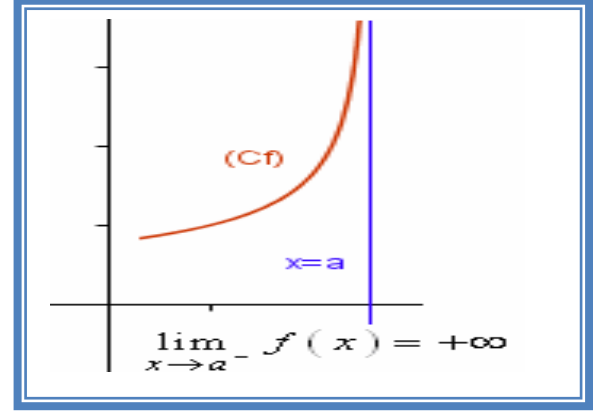
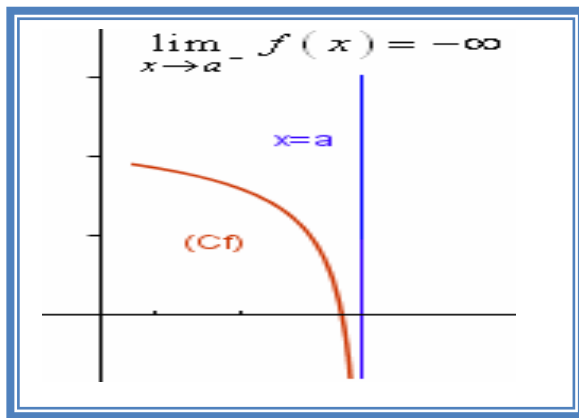
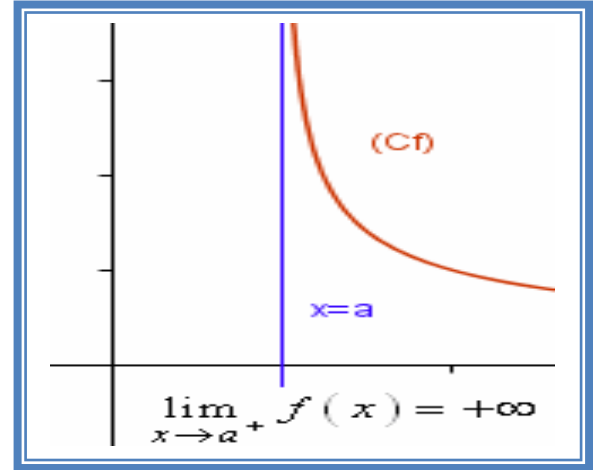
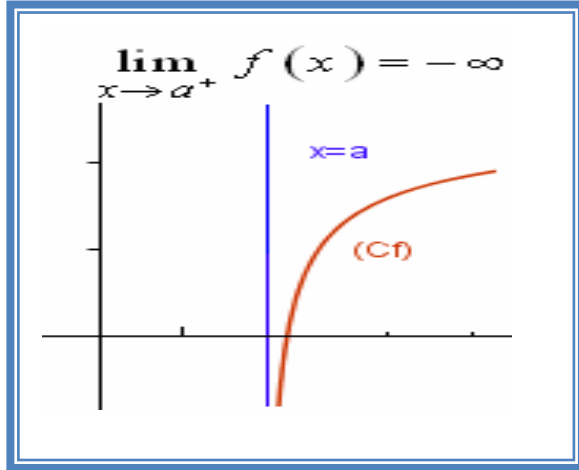
وجد عدد حقيقي T بحيث: $f(x+T) = f(x); (x-T) \in D_f; (x+T) \in D_f; \forall x \in D_f$

العدد T يسمى دور الدالة f واصغر دور موجب يسمى دور الدالة f .

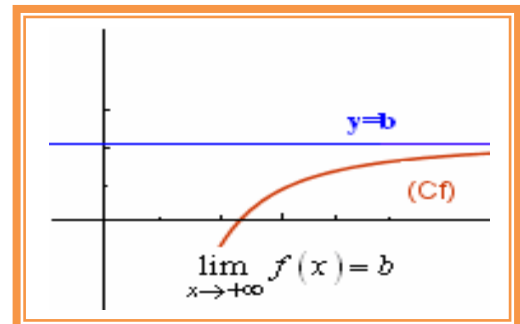
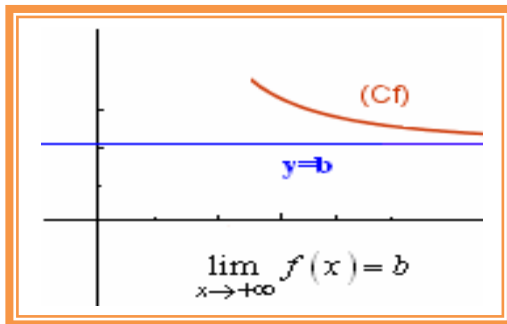


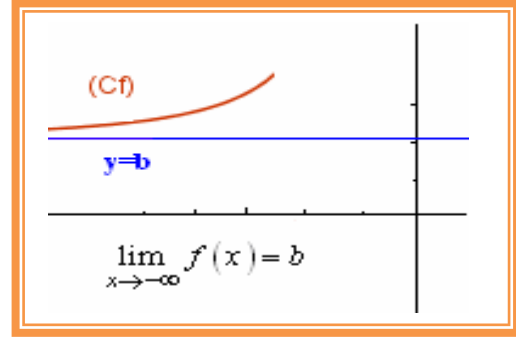
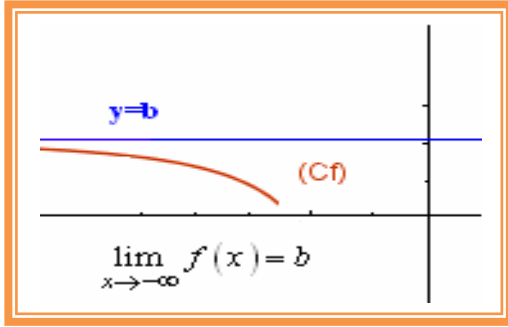
١٧ - الف - روع الـ لانهاء یت:

1. إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ المستقيم $x = a$ مقارب رأسي.



2. إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ المستقيم $y = b$ مقارب أفقي.





لنحسب: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

3. إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$

أ- إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ $(C_f) \Leftarrow$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الارتفاع.

ب- إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $(C_f) \Leftarrow$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الافاصل.

ج- إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ فلنحسب: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax$

❖ إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = 0$ $(C_f) \Leftarrow$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه

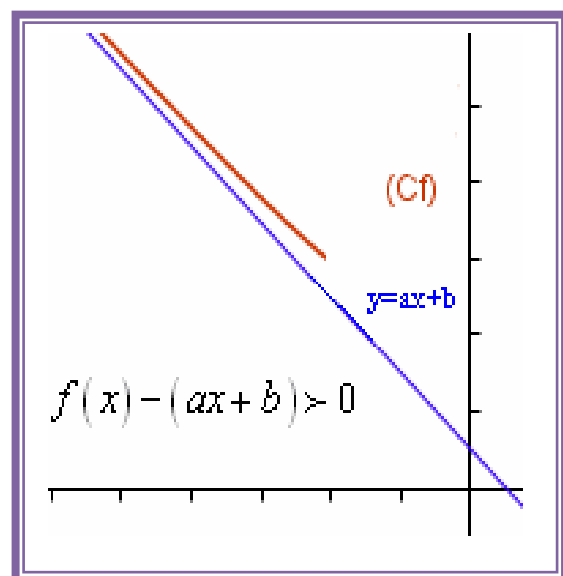
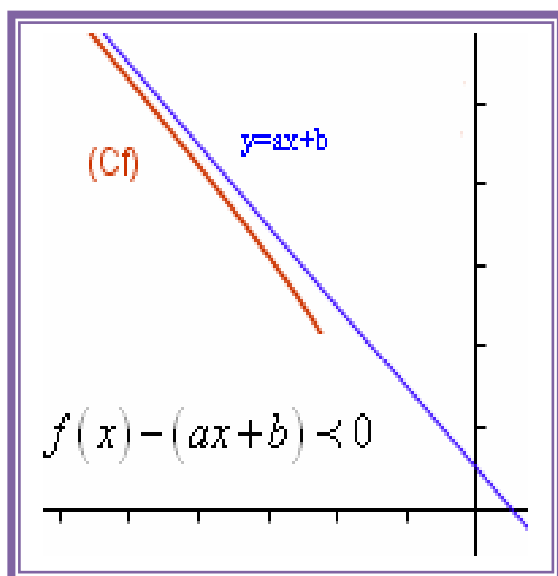
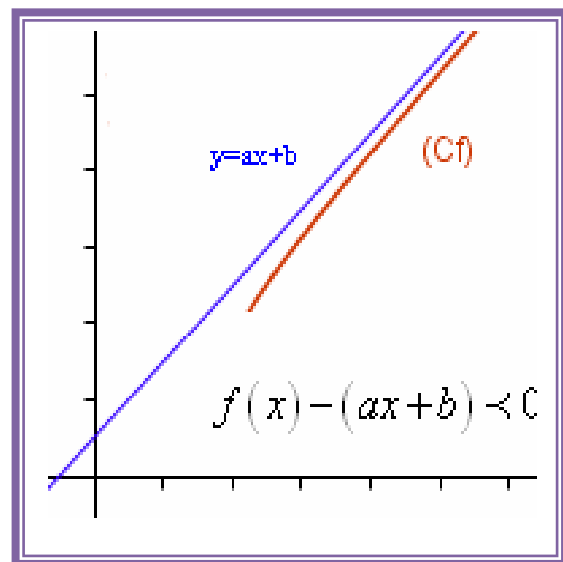
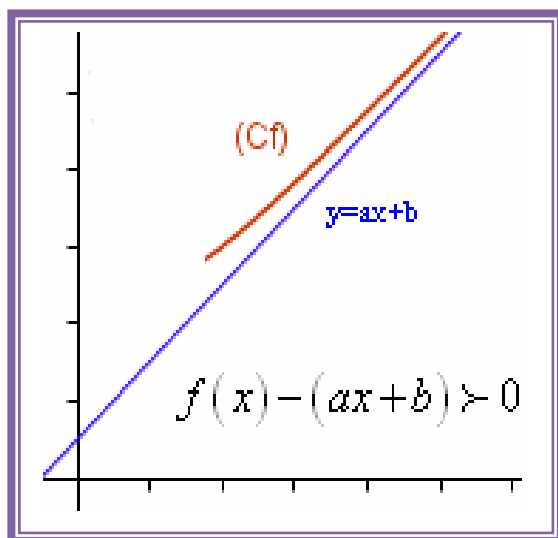
المستقيم $y = ax$

❖ إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$ $\Leftarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل



دراسة إشارة $f(x) - (ax + b)$ تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f)
بالنسبة للمقارب المائل





www.bramaths.com

Brahim Ajghaider

