

4. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 11 | (2^{10n-7} + 3^{5n-2} - 2)$ و $\forall n \in \mathbb{N} : 676 | (27^{n+1} - 26n - 27)$

-II- القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$

- خاصية 01 :

لكل (a, b) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ يوجد زوج وحيد (q, r) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ بحيث : $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.
العدد q يسمى خارج القسمة الأقليدية لـ a على b و r يسمى الباقي .

- **ملحوظة :** لاحظ أن العدد a يقبل القسمة على b إذا وفقط إذا كان الباقي r منعدما .
أي أن : $b | a \Leftrightarrow r = 0$

- خاصية 02 :

لكل (a, b) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ يوجد زوج وحيد (q, r) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ بحيث : $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$

• تمرين 03 :

1. أوجد عددا صحيحا طبيعيا n مكون من أربعة أرقام إذا علمت أن باقي القسمة الأقليدية على n لكل من العددين 21685 و 33509 هو 37 و 53 على التوالي .

2. أوجد عددا صحيحا طبيعيا n إذا علمت أن لقسمة الأقليدية على العددين 23 و 17 نفس الخارج و الباقي هو 1 و 3 على التوالي .

3. حدد المقسوم عليه b و الخارج q إذا علمت أن المقسوم هو $a = 557$ و الباقي هو $r = 89$.

4. حدد المقسوم عليه b و الباقي r إذا علمت أن المقسوم هو $a = 1517$ و الخاج هو $q = 75$.

-III- الموافقة بترديد n حيث $n \geq 2$:

- **تعريف :** ليكن n من $\mathbb{N}^*$ بحيث $n \geq 2$ و (a, b) من $\mathbb{Z}^2$.

نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $a \equiv b [n]$ إذا كان : $n | (b - a)$, إذن :

$$a \equiv b [n] \Leftrightarrow n | (b - a) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / b - a = kn$$

- خاصية 03 :

يكون عددين نسبيين a و b متوافقين بترديد n إذا و فقط إذا كان لقسمتهما على n نفس الباقي .

• ملحوظة :

الموافقة بترديد n علاقة إنعكاسية تماثلية و متعدية , نقول إنها علاقة تكافؤ .

و لكل a من $\mathbb{Z}$ المجموعة $\{a + kn / k \in \mathbb{Z}\} = \{b \in \mathbb{Z} / b \equiv a [n]\}$ تسمى صنف تكافؤ

العدد a و يرمز لها بالرمز $\bar{a}$.

- خاصية 04 :

لكل a من $\mathbb{Z}$ يوجد r من $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ بحيث : $a \equiv r [n]$ (r هو باقي قسمة a على n) .

إذن : $\forall a \in \mathbb{Z}; \exists r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} / \bar{a} = \bar{r}$

-I- قابلية القسمة في المجموعة $\mathbb{Z}$:

- تعريف :

ليكن a و b عددين نسبيين , نقول إن b يقسم a و نكتب $b | a$ إذا وجد q من $\mathbb{Z}$ بحيث : $a = bq$.

- إستنتاجات :

- لكل a من $\mathbb{Z}$ لدينا : $a | a$ و $1 | a$.
- لكل a من $\mathbb{Z}$ أربعة قواسم على الأول وهي : $-a$, 1 , -1 , و a .
- إذن : $\forall a \in \mathbb{Z} : \{-1, 1, -a, a\} \subseteq D_a$, حيث D_a هي مجموعة قواسم العدد a .
- إذا كان $b | a$ و $a \neq 0$ فإن $|b| \leq |a|$, و هذا يعني أن D_a مجموعة منتهية .
- مهما يكن (a, b, c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $\begin{cases} a | b \\ b | c \end{cases} \Rightarrow a | c$ و $\begin{cases} ab | ac \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow b | c$

- خاصيات :

- ليكن (a, b) من $\mathbb{Z}^2$, إذا كان $q | a$ فإن : $q | b - a \Leftrightarrow q | b$.
- لكل (a, b) من $\mathbb{Z}^2$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $(b - a) | (b^n - a^n)$.
- مهما يكن (a, b, c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $\begin{cases} a | b \\ a | c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a | (b + c) \\ a | (b - c) \end{cases}$.

وبصفة عامة : $\begin{cases} a | b \\ a | c \end{cases} \Rightarrow \forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : a | (bu + cv)$.

• تمرين 01 :

1. إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $7 | (n - 2)$, فيين أن : $7 | (n^3 - 1)$.

2. ليكن (a, b, c) من $\mathbb{N}^3$ بحيث $a | (7b + 5c)$ و $a | (4b + 3c)$, فيين أن : $a | c$ و $a | b$.

• تمرين 02 :

1. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلات التالية :

$$(E_1): x^2 - y^2 = 16 \text{ و } (E_2): x^2 - 4y^2 = 36 \text{ و } (E_3): 9x^2 - 4y^2 = 44$$

2. حدد جميع قيم العدد الصحيح الطبيعي n التي تحقق على التوالي :

$$(1): (n-1) | (n+11) \text{ و } (2): (n-4) | (3n+24) \text{ و } (3): (n-3) | (n^2+3)$$

3. حدد جميع قيم العدد النسبي x التي تحقق على التوالي :

$$(1): (x-2) | (x+5) \text{ و } (2): (x+7) | (2x+15) \text{ و } (3): (x+1) | (x^3+2)$$

و بالتالي فمجموعة أصناف تكافؤ علاقة الموافقة بترديد n هي : $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$

و يرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ، إذن : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$.

- **خاصية 05:**

• مهما يكن (a, b, c, d) من $\mathbb{Z}^4$ و n من $\mathbb{N}^*$ بحيث $n \geq 2$ لدينا :

$$\begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d [n] \\ ac \equiv bd [n] \end{cases}$$

نعتبر عن هذه الخصائص بقولنا ان الموافقة بترديد n متسجمة مع عمليتي الجمع و الضرب .
• و من الخصائص السابقة نستنتج أن :

$$\begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : ua + vc \equiv ub + vd [n] \\ \forall p \in \mathbb{N} : a^p \equiv b^p [n] \end{cases}$$

• **مبرهنة:** (مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 5 و 9 و 11 و 25)

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا و $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$ كتابته في نظمة العد

العشري . $(\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\})$ ، نكتب : $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$.

يكون العدد a قابلا للقسمة على 2 (على التوالي على 5) إذا و فقط إذا كان رقم وحدته a_0 يقبل القسمة على 2 (على التوالي على 5) .

يكون العدد a قابلا للقسمة على 3 (على التوالي على 9) إذا و فقط إذا كان : $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ يقبل القسمة على 3 (على التوالي على 9) .

يكون العدد a قابلا للقسمة على 4 (على التوالي على 25) إذا و فقط إذا كان العدد $\overline{a_1 a_0}$ يقبل القسمة على 4 (على التوالي على 25)

بمعنى أن : $\overline{a_1 a_0} \equiv 0 [4]$ (على التوالي $\overline{a_1 a_0} \equiv 0 [25]$)

يكون العدد a قابلا للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان : $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \dots + (-1)^n a_0$ يقبل القسمة على 11 .

• **تمرين 04:**

1. حدد رقم الوحدات x لكي يقبل العدد $a = \overline{37568x}$ القسمة على 11 .

2. حدد الرقمين x و y لكي يقبل العدد $b = \overline{28x75y}$ القسمة على 3 و 11 .

3. حدد الأرقام x و y و z لكي يقبل العدد $c = \overline{13xy45z}$ القسمة على 8 و 9 و 11 .

4. ما هو باقي القسمة الألفية للعدد $a = 11257^{304}$ على 11 ؟

5. بين أن العدد $e = \overline{cdu}$ يقبل القسمة على 8 إذا و فقط إذا كان $4c + 2d + u$ يقبل القسمة على 8 .

• **الجمع و الضرب في المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:**

- **تعريف:** لكل (a, b) من $\mathbb{Z}^2$ نضع : $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ و $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$.

- **أمثلة:** لننشئ جدولتي الجمع و الضرب في المجموعة : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

الضرب في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$						الجمع في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$					
$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

• **تمرين 05:**

1. بين أنه لكل (a, b) من $\mathbb{Z}^2$ لدينا :

$$(a \equiv 0 [7] \text{ و } b \equiv 0 [7]) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \equiv 0 [7]$$

2. لتكن S مجموعة حلول المعادلة : $x^3 \equiv 1 [7]$ حيث $x \in \mathbb{Z}$.

تحقق من أن : $\{2, 4\} \subset S$ ، ثم حدد مجموعة الحلول S .

3. نعتبر العددين $A = 5^{2000}$ و $B = 4^{1000}$.

بين أن : $A \equiv 4 [7]$ و $B \equiv 4 [7]$ ثم إستنتج أن : $A + B \equiv 1 [7]$.

4. ليكن (a, b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $a \equiv b [n]$.

حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات التالية :

$$r : a! \equiv b! [n] \text{ و } q : (a+n) \equiv b [n] \text{ و } p : \forall x \in \mathbb{Z} : (a-x) \equiv (b-x) [n]$$

5. بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $n^3 - n \equiv 0 [2]$ و $n^3 - n \equiv 0 [6]$.

هل العدد $P(n) = n^3 - n$ يقبل القسمة على الأعداد التالية 3 و 4 و 12 ؟ علل جوابك .

وبالتالي: فالقاسم المشترك الأكبر لعددين a و b حيث $a > b$ و b لا يقسم a هو آخر باقي غير منعدم للقسمة المتتالية للعدد a على b .

- **مثال:** لنحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 33810$ و $b = 4116$.

الخارج	$q_1 = 8$	$q_2 = 4$	$q_3 = 1$	$q_4 = 2$
$a = 33810$	$b = 4116$	$r_1 = 882$	$r_2 = 588$	$r_3 = 294$
$r_1 = 882$	$r_2 = 588$	$r_3 = 294$	$r_4 = 0$	الباقى

من جدول القسمة المتتالية نستنتج أن : $33810 \wedge 4116 = 294$.

- **تمرين 06:**

1. حدد $5633 \wedge 4847$ و $5617 \wedge 813$ مستعملا خوارزمية أقليدس.

2. أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$.

ثم إستنتج قيم $(5n^3 - n) \wedge (n+2)$ الممكنة.

ب- حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها على التوالي :

$$(2) : (5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19 \quad \text{و} \quad (1) : (n+2) \mid (5n^3 - n)$$

- **خاصة 07:**

لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $a \wedge b = \delta \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / \delta = au + bv$.

- **ملحوظة:** إذا كان a و b عددين نسبيين غير منعدمين بحيث $a \wedge b = \delta$ فخوارزمية أقليدس تمكننا

من إيجاد زوج (u, v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $\delta = au + bv$.

- **مثال:** نعتبر العددين $a = 120$ و $b = 35$ ، ننجز القسمة المتتالية ل a على b فنحصل على :

الخارج	$q_1 = 3$	$q_2 = 2$	$q_3 = 3$
$a = 120$	$b = 35$	$r_1 = 15$	$r_2 = 5$
$r_1 = 15$	$r_2 = 5$	$r_3 = 0$	الباقى

من جهة لدينا : $120 \wedge 35 = 5$.

و من جهة أخرى : $120 = 3 \times 35 + 15$ إذن : $15 = 120 - 3 \times 35$

$$\text{و} \quad 5 = 35 - 2 \times 15 = 35 - 2 \times (120 - 3 \times 35) = -2 \times 120 + 7 \times 35$$

إذن : $5 = -2 \times 120 + 7 \times 35$.

III- القاسم المشترك الأكبر:

1. **تعريف:**

ليكن a و b عددين نسبيين غير منعدمين ، المجموعة $D_a \cap D_b$ المكونة من القواسم المشتركة للعددين a و b

تقبل أكبر عنصر يرمز له بالرمز $a \wedge b$ ويسمى القاسم المشترك الأكبر ل a و b ، لدينا إذن :

• $(\forall k \in \mathbb{Z} / k \mid a \text{ و } k \mid b : k \leq d) \quad \text{و} \quad d \mid a \text{ و } d \mid b \Leftrightarrow d = a \wedge b$

- **مثال:** لدينا : $D_{30} = \{-30, -15, -6, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 6, 15, 30\}$

و $D_{54} = \{-54, -27, -18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$

إذن : $D_{30} \cap D_{54} = \{-6, -2, -1, 1, 2, 6\}$ ، وبالتالي : $30 \wedge 54 = 6$.

2. **خصائص:**

• لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $a \wedge b = b \wedge a = |a| \wedge |b| = |a| \wedge |b|$

• و لكل a من $\mathbb{Z}$ لدينا : $a \wedge 0 = |a|$ و $a \wedge 1 = 1$ و $a \mid 1$ و $b \mid a \Leftrightarrow |b| \mid |a|$

• مهما يكن (a, b, c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $(ab) \wedge (ac) = |a| (b \wedge c)$

• و إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و b فإن : $\left(\frac{a}{d}\right) \wedge \left(\frac{b}{d}\right) = \frac{(a \wedge b)}{|d|}$ ، وبصفة خاصة

إذا كان $a \wedge b = \delta$ فإن : $\left(\frac{a}{\delta}\right) \wedge \left(\frac{b}{\delta}\right) = 1$

• مهما يكن a و b و q من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $a \wedge b = (a - bq) \wedge b$.

3. **خوارزمية أقليدس أو طريقة القسمة المتتالية:**

- **خاصة 06:**

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث $a > b$ و b لا يقسم a ، إذا كان r هو باقي

القسمة الأقليدية ل a على b فإن : $a \wedge b = b \wedge r$.

- **طريقة القسمة المتتالية:**

لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ($a > b$ و b لا يقسم a) ، ننجز القسمة الأقليدية

ل a على b إذن : $a = bq_1 + r_1$ حيث $0 < r_1 < b$ ولدينا $a \wedge b = b \wedge r_1$.

ثم ننجز القسمة الأقليدية ل b على r_1 حيث $0 \leq r_2 < r_1$ ولدينا $b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$.

إذا كان $r_2 = 0$ فإن $r_1 \wedge 0 = r_1$ إذن : $a \wedge b = r_1$

أما إذا كان $r_2 \neq 0$ فلنأخذ نتابع طريقة القسمة المتتالية إلى أن يكون الباقي $r_k = 0$

و يكون لدينا في هذه الحالة : $a \wedge b = r_{k-1}$.

IV- الأعداد الأولية فيما بينها:

1. تعريف:

نفول إن عددين نسبيين غير منعدمين a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان : $a \wedge b = 1$.

2. مبرهنة يوزو ونتائجها:

• مبرهنة يوزو (thérème de Bezout)

يكون عددين نسبيين غير منعدمين a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد (u, v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث :

$$au + bv = 1$$

- تمرين 07:

1. بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$1 = n \wedge (n+1) \text{ و } 1 = (2n+1) \wedge (9n+4) \text{ و } 1 = (3n-2) \wedge (5n-3)$$

2. حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 4$ التي يكون من أجلها الكسر $\frac{n^2 - 7n + 15}{n - 3}$ غير قابل للإختزال .

3. حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 4$ التي يكون من أجلها الكسر $\frac{n^2 - 7n + 15}{n - 3}$ عدد صحيحا طبيعيا .

• مبرهنة كوص (théoreme de Gauss)

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد نسبية غير منعدمة .

- إذا كان $a \wedge b = 1$ و $a \mid bc$ فإن : $a \mid c$.

• استنتاج:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

لكل a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $b \equiv c[n] \Rightarrow a \wedge n = 1 \text{ و } ab \equiv ac[n]$.

- تمرين 08:

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $a \wedge b = 1$ و $a > b$ ، بين أن :

$$(a+b) \wedge (a-b) = 1 \text{ أو } (a+b) \wedge (a-b) = 2$$

- خاصية 07:

مهما يكن (a, b, c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $a \wedge (bc) = 1 \Leftrightarrow (a \wedge b = 1 \text{ و } a \wedge c = 1)$

و بصفة عامة لكل (a, b, c, d) من $\mathbb{Z}^4$ لدينا : $(ac) \wedge (bd) = 1 \Leftrightarrow (a \wedge b = 1 \text{ و } c \wedge d = 1)$

و بصفة خاصة : $a \wedge b = 1 \Rightarrow \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 : a^n \wedge b^m = 1$.

- خاصية 08:

مهما يكن (a, b, c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $(ab) \mid c \Rightarrow (a \mid c \text{ و } b \mid c)$ و $a \wedge b = 1$.

V- حل المعادلة $ax + by = c$ في المجموعة $\mathbb{Z}^2$:

- مثال 01:

لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x + 3y = 1$: (E) .

لدينا : $5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$ ، إذن الزوج $(-1, 2)$ حل خاص للمعادلة (E) .

و من جهة أخرى لدينا : $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1 \end{cases}$ ، إذن : $5(x+1) + 3(y-2) = 0$

$$5(x+1) = -3(y-2) \text{ أي أن :}$$

و حسب مبرهنة كوص فإن : $3 \mid (x+1)$ (لأن : $3 \mid 5(x+1)$ و $3 \wedge 5 = 1$)

ومنه فإن : $x = -1 + 3k$ و $y = 2 - 5k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن : $S = \{(-1+3k, 2-5k) / k \in \mathbb{Z}\}$.

- خاصية 09:

إذا كان a و b عددين نسبيين أوليين فيما بينهما فمجموعة حلول المعادلة $ax + by = 1$ في $\mathbb{Z}^2$ هي :

$$S = \{(x_0 + kb, y_0 - ka) / k \in \mathbb{Z}\} \text{ ، حيث } (x_0, y_0) \text{ حل خاص .}$$

- تمرين 09:

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $437x - 241y = 1$: (E) .

- مثال 02:

لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $26x + 65y = 13$: (E) .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 26x + 65y = 13 \Leftrightarrow 2x + 5y = 1$$

ومن جهة أخرى : $2 \times (-2) + 5 \times 1 = 1$ إذن الزوج $(-2, 1)$ حل خاص للمعادلة $2x + 5y = 1$

وبالتالي فمجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(-2+5k, 1-2k) / k \in \mathbb{Z}\}$.

• خلاصة:

لكل عددين نسبيين غير منعدمين a و b لدينا : $ax + by = a \wedge b \Leftrightarrow a'x + b'y = 1$

حيث : $a' = (a \wedge b)a$ و $b' = (a \wedge b)b$.

و بما أن $a' \wedge b' = 1$ فإن مجموعة الحلول هي : $S = \{(x_0 + kb', y_0 - ka') / k \in \mathbb{Z}\}$

حيث (x_0, y_0) حل خاص للمعادلة : $a'x + b'y = 1$.

VI - المضاعف المشترك الأصغر:

1. تعريف:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين نسبيين غير منعدمين a و b هو أصغر مضاعف مشترك موجب قُطعا لهما معا ويرمز له بـ $a \vee b$ أو $\text{ppcm}(a, b)$.

بصفة خاصة $a \vee b = |a|$ و $b | a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$ ، و لكل a من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $a \vee 1 = |a|$ و $a \vee a = |a|$.

2. خاصيات:

- لكل (a, b) من $\mathbb{Z}^{*2}$ لدينا : $a \vee b = b \vee a = |a| \vee b = a \vee |b| = |a| \vee |b|$.
- مهما يكن (a, b, c) من $\mathbb{Z}^{*3}$ لدينا : $(ab) \vee (ac) = |a|(b \vee c)$.
- إذا كان d فاسما مشتركا للعددين a و b فإن : $\left(\frac{a}{d}\right) \vee \left(\frac{b}{d}\right) = \frac{(a \vee b)}{|d|}$.
- لكل (a, b) من $\mathbb{Z}^{*2}$ لدينا : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$ و $(a \vee b) \times (a \wedge b) = |ab|$.

- تمرين 11:

1. أحسب $n \vee (n+2)$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.
2. بين أن : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge (ab) = 1$ ، ثم إستنتج أن : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \wedge b = (a+b) \wedge (a \vee b)$.

3. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ النظمة :

$$(1): \begin{cases} a+b=68 \\ a \vee b=240 \end{cases}$$

- تمرين 12:

1. لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $A = 3n+4$ و $B = 9n-5$.
أ- حدد $A \wedge B$ تبعا لقيم n من $\mathbb{N}^*$.
ب- حدد قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها : $(2): \begin{cases} A \wedge B = 17 \\ A \vee B = 884 \end{cases}$.
2. أ- حدد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية التي مربعها ينقسم العدد 1980.
ب- حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $(3): (a \vee b)^2 - 5(a \wedge b)^2 = 1980$.
3. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ النظمة : $(4): \begin{cases} x \vee y = 210(x \wedge y) \\ y - x = x \wedge y \end{cases}$.

• حل المعادلة $ax + by = c$: حيث $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ و $c \in \mathbb{Z}$:

- مثال 03:

- لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 27x - 39y = 12$.
- لدينا : $27 \wedge 39 = 3$ و $3 | 12$ ، إذن : $(E) \Leftrightarrow 9x - 13y = 4$.
- ومن جهة أخرى لدينا : $9 \times 3 - 13 \times 2 = 1$ ، إذن $(3, 2)$ حل خاص للمعادلة : $9x - 13y = 1$.
- وبالتالي حل خاص للمعادلة $9x - 13y = 4$ هو : $(12, 8)$ ولدينا :
- $(E) \Leftrightarrow 9(x - 12) = 13(y - 8)$ و بتطبيق مبرهنة كوكس نحصل على :
- $x = 12 + 13k$ و $y = 8 + 9k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، وبالتالي فمجموعة حلول المعادلة (E) هي :
- $S = \{(12 + 13k, 8 + 9k) / k \in \mathbb{Z}\}$.

- خلاصة:

- المعادلة $(E): ax + by = c$ تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان $c | (a \wedge b)$ ، وفي هذه الحالة نضع : $a' = (a \wedge b)a$ و $b' = (a \wedge b)b$ و $c' = (a \wedge b)c$ فيصبح لدينا :
- $(E) \Leftrightarrow a'x + b'y = c'$ حيث $a' \wedge b' = 1$.
- نبحث عن حل خاص (x_0, y_0) للمعادلة : $a'x + b'y = 1$ ، و حل خاص للمعادلة : $a'x + b'y = c'$ هو $(c'x_0, c'y_0)$ ولدينا : $(E) \Leftrightarrow a'(x - c'x_0) = b'(c'y_0 - y)$.
- و بتطبيق مبرهنة كوكس نحصل على : $x = c'x_0 + kb'$ و $y = c'y_0 - ka'$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي فإن :
- $S = \{(c'x_0 + kb', c'y_0 - ka') / k \in \mathbb{Z}\}$.

- تمرين 10:

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلات التالية :
(1): $3x - 4y = 10$ و (2): $3x - 5y = 13$ و (3): $7x - 9y = 1$.
2. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم n الذي باقي قسمته الألفية على العددين 52 و 64 هو 7.
3. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ النظمة : $\begin{cases} 2x + 3y = 78 \\ -6 \leq x \leq 21 \\ -5 \leq y \leq 14 \end{cases}$.

VII- الأعداد الأولية:

1. تعريف:

ليكن p من $\mathbb{N}$ بحيث $p \geq 2$ ، نقول إن p عدد أولي إذا كان له قاسمان فقط في $\mathbb{N}$ هما 1 و p .

- مثال:

الأعداد العشر الأولى الأولية هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 و 29 .
و هذه الأعداد كلها فردية ماعدا 2 فهو عدد زوجي .

- تمرين 13:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \geq 2$ ، بين أن :

(n عدد أولي) $\Rightarrow$ ($2^n - 1$ عدد أولي) .
هل العكس صحيح أم خاطيء ؟ علل جوابك .

2. ملحوظات:

- لكل عددين أوليين p و q بحيث $p \neq q$ لدينا : $p \wedge q = 1$.
- ليكن a من $\mathbb{Z}$ ، إذا كان p عددا أوليا لا يقسم a فإن $p \wedge a = 1$ وبصفة خاصة :
 $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, p-1\} : p \wedge k = 1$

3. خاصيات:

- **خاصية 10:** كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يقبل على الأقل قاسما أوليا p .
- **خاصية 11:** كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يقبل قاسما أوليا p بحيث $p^2 \leq n$.
- **خاصية 12:** إذا كانت a_1 و a_2 و . . . و a_n أعدادا نسبية و p عدد أولي ، فإن :
 $p \mid (a_1 a_2 \dots a_n) \Leftrightarrow \exists k \in \{1, 2, \dots, n\} : p \mid a_k$
- **خاصية 13:** مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية و يرمز لها بالرمز P .

4. ميرهنبي فيرما:

- تمرين 14:

1. ليكن p عددا أوليا ، بين أن : $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\} : p \mid C_p^k$.

2. إستنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : n^p \equiv n [p]$.

3. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : n \wedge p = 1 \Rightarrow n^{p-1} \equiv 1 [p]$.

- ميرهنبة:

إذا كان p عددا أوليا فإن : $\forall a \in \mathbb{Z} : a^p \equiv a [p]$ (le petit théorème de Fermat)

و إذا كان $p \wedge a = 1$ فإن : $a^{p-1} \equiv 1 [p]$ (ميرهنبة Fermat)

- تطبيقات ميرهنبة فيرما:

- تمرين 15:

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : n^5 \equiv n [5]$ ، ثم إستنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \in \mathbb{N}^* : n^{p+4} \equiv n^p [5]$.

2. بين أن : $[2] : n^p \equiv n^{p+4}$ ، $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \in \mathbb{N}^* : n^{p+4} \equiv n^p$ ، ثم إستنتج أن للعددين n^{p+4} و n^p نفس رقم الوحدات .

- تمرين 16:

بين أن : $\forall a \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a^{561} \equiv a [3] \\ a^{561} \equiv a [11] \\ a^{561} \equiv a [17] \end{cases}$ ، ثم إستنتج أن : $\forall a \in \mathbb{Z} : a^{561} \equiv a [561]$.

5. ميرهنبة ويلسون:

- تمرين 16:

ليكن p عددا أوليا بحيث $p \geq 3$.

- بين أن : $(p-1)! \equiv 1 [p]$.
- بين أن : $(x \equiv 1 [p] \text{ أو } x \equiv -1 [p]) \Leftrightarrow x^2 \equiv 1 [p] \quad \forall x \in \mathbb{Z}$.
- بين أن : $\forall x \in \{1, 2, 3, \dots, p-1\} ; \exists u \in \{1, 2, 3, \dots, p-1\} / ux \equiv 1 [p]$.
- أثبت أن : $(p-1)! \equiv (p-1)[p]$.
- بين أن : p عدد أولي $\Rightarrow (p-1)! \equiv (p-1)[p]$.

- ميرهنبة ويلسون (théorème de wilson)

إذا كان p عددا صحيحا طبيعيا بحيث $p \geq 3$ فإن : $(p-1)! \equiv -1 [p] \Leftrightarrow p$ عدد أولي .

VIII- التفكك إلى جداء من عوامل أولية:

- ميرهنبة:

كل عدد صحيح نسبي n بحيث $|n| \geq 2$ يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل : $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

حيث $\varepsilon = sg(n) = \pm 1$ ، $k \in \mathbb{N}^*$ ، $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ و p_1 و p_2 و . . . و p_k

أعداد أولية موجبة قطعا و مختلفة فيما بينها مثلى مثلى .

- ملحوظة و نتائج:

■ الكتابة السابقة للعدد n تسمى تفكيكا ل n إلى جداء عوامل أولية ، و الأعداد p_1 و p_2 و . . . و p_k هي قواسم n الأولية الموجبة .

■ يكون عدد d قاسما ل n إذا وفقط إذا كان يكتب على شكل : $d = \varepsilon p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ حيث $d = \pm 1$

و $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ لكل i من $\{1, 2, \dots, k\}$.

■ يكون عدد m مضاعفا ل n إذا وفقط إذا كان يكتب على شكل : $m = \varepsilon p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}$ حيث $m = \pm 1$

و $\alpha_i \leq \gamma_i$ لكل i من $\{1, 2, \dots, k\}$ و $\gamma_i \geq 0$ لكل i من $\{k+1, k+2, \dots, r\}$.

2. نظمات العد ذات الأساس b حيث $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

- مبرهنة: ليكن b عددا صحيحا طبعيا بحيث $b \geq 2$.

لكل a من $\mathbb{N}$ يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد k بحيث: $a = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$

حيث: $0 \leq a_i \leq b-1$ و $\forall i \in \{0, 1, \dots, k\}$ و $a_k \neq 0$.

نكتب: $a = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}_{(b)}$ وهذه الكتابة تسمى تمثيلا للعدد a في نظمة العد ذات الأساس b .

- ملحوظات:

الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و $b-1$ تمثل برموز تسمى أرقاما: في نظمة العد العشري نستعمل الرموز (أي الأرقام): 0 و 1 و ... و 9.

في نظمة العد ذات الأساس 12 نستعمل الرموز: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\}$ حيث α و β يمثلان على التوالي العددين 10 و 11 في نظمة العد العشري.

مثلا: $\overline{\alpha 21 \beta 7}_{(12)}$ يمثل العدد $7 + 11 \times 12 + 12^2 + 2 \times 12^3 + 10 \times 12^4$ في نظمة العد العشري.

• تمرين 18:

1. أكتب في نظمة العد ذات الأساس 4 تمثيل العدد الذي يكتب 342 في نظمة العد العشري.

2. في نظمة العد ذات الأساس 5 أحسب: $x + y$ و $y - x$ و $x \cdot y$ حيث:

$$x = \overline{232}_{(5)} \text{ و } y = \overline{1341}_{(5)}$$

$$1. \text{ لدينا: } 342 = 4 \times 85 + 2 \text{ و } 85 = 4 \times 21 + 1 \text{ و } 21 = 4 \times 5 + 1$$

$$5 = 4 \times 1 + 1 \text{ و } 1 = 4 \times 0 + 1$$

$$342 = 4(4 \times 21 + 1) + 2 \quad \text{إذن:}$$

$$= 4^2(4 \times 5 + 1) + 4 + 2$$

$$= 4^3(4 \times 1 + 1) + 4^2 + 4 + 2$$

$$= 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4 + 2$$

$$342 = \overline{11112}_{(4)} \text{ وبالتالي فإن}$$

و نلاحظ أن الأرقام التي تمثل 342 في نظمة العد ذات الأساس 4 هي بواقى الفسمات المتتالية للعدد 342 على 4.

$$2. \text{ نضع } b = 5, \text{ إذن: } x = 2b^2 + 3b + 2 \text{ و } y = b^3 + 3b^2 + 4b + 1$$

$$\text{و بالتالي: } x + y = 2b^3 + b^2 + 2b + 3 \text{ أي: } x + y = \overline{2123}_{(5)}$$

$$\text{و } y - x = b^3 + b^2 + 4 \text{ أي: } y - x = \overline{1104}_{(5)}$$

$$\text{و } x \cdot y = 4b^5 + 3b^4 + 3b^3 + 2b^2 + b + 2 \text{ أي: } x \cdot y = \overline{433212}_{(5)}$$

- خاصة 14:

إذا كان a و b عددين صحيحين طبيعيين و $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ مجموعة القواسم الأولية ل a أو b فإن:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ و } b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \text{ حيث: } \alpha_i \geq 0 \text{ و } \beta_i \geq 0 \text{ لكل } i \text{ من } \{1, 2, \dots, k\}$$

$$\text{و لدينا: } \begin{cases} a \wedge b = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k} \\ a \vee b = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k} \end{cases} \text{ حيث: } \begin{cases} \gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i) \\ \delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i) \end{cases} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

- تمرين 17:

1. ليكن r عددا جذريا، نقول إن r عدد عشري إذا وجد m من $\mathbb{N}$ بحيث $r \times 10^m \in \mathbb{Z}$.

$$\text{نضع } r = \frac{p}{q} \text{ حيث } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \text{ و } p \wedge q = 1$$

$$\text{بين أن: } r \text{ عدد عشري} \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / r = 2^\alpha \times 5^\beta$$

2. ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$ و p قاسم أولي للعدد $n!$.

أ- حدد أس p في تفكيك $n!$ إلى جداء عوامل أولية، ثم اعط تفكيك العدد $14!$ إلى جداء عوامل أولية

ب- أوجد عدد الأصفار التي تنتهي بها كتابة العدد $100!$ في نظمة العد العشري.

3. لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$ نضع: $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ حيث $\alpha_i \geq 1$ و $p_1, \dots, p_r$ أعداد أولية.

$$\text{أ- بين بالترجع على } r \text{ أن مجموع قواسم العدد } n \text{ الصحيحة الطبيعية هو: } S(n) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

ب- بين أنه لكل n و m من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2, m \geq 2$ و $n \wedge m = 1$ لدينا:

$$S(m \cdot n) = S(m) \cdot S(n)$$

- VIV - نظمات العد:

1. تقديم:

• لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية في نظمة العد العشري نستعمل الأرقام: 0 و 1 و 2 و ... و 9 نقول إن أساس نظمة العد العشري هو 10 (لأننا إستعملنا عشرة أرقام).

- مثلا 256 8 هو العدد: $8 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6$

و $4 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10$ هو العدد: 4 300 970

• لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية في نظمة العد الإثنائي نستعمل فقط الرقمين: 0 و 1، أساس نظمة العد الإثنائي هو 2.

- العدد 29 يكتب على الشكل: $29 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1$ ، نكتب: $29 = \overline{11101}_{(2)}$

و هذا هو تمثيل العدد 29 في نظمة العد الإثنائي.