

**meljohra@g
mail.com**

Dénombrement

16/06/2009

ثانوية علال بن عبد الله
البحرة محمد

التعداد	4
الحصة رقم 1	4
I. المبدأ الأساسي للتعداد	4
1. نشاط 1: تكوين أعداد بأرقام مختلفة	4
2. نشاط 2: تكوين قن سري	4
3. المبدأ	4
4. ترميز	4
5. خاصية	4
6. تمرين	4
الحصة رقم 2	5
II. الترتيبات	5
1. نشاط 1	5
2. الحل 1	5
3. خلاصة 1	5
4. نشاط 2	5
5. الحل 2	5
6. خلاصة 2	5
7. تعريف	5
8. خاصية	5
9. تمرين تطبيقي	5
10. الحل	5
الحصة رقم 3	7
III. التبديلات	7
1. تعريف و خاصية	7
2. مثال 1	7
3. مثال 2	7
4. ملاحظة	7
5. خاصية	7
IV. التاليفات	7
1. تعريف	7
2. نشاط	7
3. خاصية	7
4. نتائج	8
الحصة رقم 4	9
V. دراسة السحب	9
1. السحب ثانيا	9
2. السحب بالتتابع و بدون إحلال	9
3. السحب بالتتابع و بإحلال	9
4. حول التعداد سلسلة تمارين	9
a. تمرين 1	9
b. الحل 1	9
c. تمرين 2	9
d. الحل 2	9
e. تمرين 3	9
f. الحل 3	9
g. تمرين 4	9
h. الحل 4	10
i. تمرين 5	10
j. الحل 5	10
k. حلول تمارين سلسلة التعداد	10

l.	1	الحل 1.....	10
m.	2	الحل 2.....	10
n.	3	الحل 3.....	10
o.	4	الحل 4.....	10
p.	5	الحل 5.....	11

الجزيرة
محمّد

التعداد

الحصة رقم 1

1. المبدأ الأساسي للتعداد

1. نشاط 1: تكوين أعداد بأرقام مختلفة

كم من عدد مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 1, 2, 5, 8. كم من بين هذه الأعداد هو عدد زوجي كم من بين تلك الأعداد هو عدد قابل للقسمة على 5.

2. نشاط 2: تكوين قن سري

نريد تكوين قنا سريا مكون من حرف لاتيني من بين: A, B, C, D, متبوع برقمين مختلفين من بين الأرقام 1 و3 و5 و7 و9 مثلا:

1	5	A
---	---	---

كم قنا سريا يبتدىء بالحرف B يمكن تكوينه
كم قنا سريا يبتدىء بأحد الحرفين A أو B يمكن تكوينه
كم هو عدد الأقنان السرية التي يمكن تكوينها

3. المبدأ

نعتبر وضعية تعدادية مكونة من p اختبار: E_1 و E_2 و و E_p .
إذا كان الاختبار E_1 يتم ب n_1 كيفية مختلفة
.....
و إذا كان الاختبار E_p يتم ب p كيفية مختلفة
فإن عدد الكيفيات التي تتم بها هذه الوضعية التعدادية هو $n_1.n_2....n_p$

4. ترميز

لتكن E مجموعة منتهية. عدد عناصرها يسمى رئيسي المجموعة E و يرمز لها بالرمز: $\text{card}(E)$.
إذا كانت $E = \emptyset$ فإن $\text{card}(E) = 0$.

5. خاصية

لتكن E و F مجموعتين منتهيتين لدينا:
 $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$

6. تمرين

نرمي نردا وجوه الستة مرقمة من 1 إلى 6 ثلاث مرات متتالية
نحصل على نتائج على شكل متلوثات (x, y, z)
حيث x هو نتيجة الرمية الأولى و y و z هما على التوالي نتيجتي الرمييتين الثانية و الثالثة.
ما هو عدد النتائج الممكنة؟

الحصة رقم 2

II. الترتيبات

1. نشاط 1

انطلق 9 عدائين في سباق ل 400 متر.
ما هو عدد إمكانيات الدخول في المراتب ثلاث الأولى.

2. الحل 1

يتم احتلال الصف الأول ب 9 كيفيات مختلفة
يتم احتلال الصف الثاني ب 8 كيفيات مختلفة
يتم احتلال الصف الثالث ب 7 كيفيات مختلفة
و منه عدد إمكانيات الدخول في المراتب الثلاثة الأولى هو $9 \times 8 \times 7 = 504$.

3. خلاصة 1

في هذا النشاط الأول كل إمكانية للدخول في المراتب الثلاثة الأولى للعدائين التسعة تسمى ترتيبية بدون تكرار ل 3 عناصر من بين 9 عناصر
العدد $9 \times 8 \times 7 = 504$ هو جداء ثلاثة أعداد طبيعية بدأ من 9 و في تناقص . رمزه هو A_9^3
ولدينا $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

4. نشاط 2

كم من عدد من 3 أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 1 و 4 و 7 و 9.

5. الحل 2

يتم تكوين رقم الوحدات ب 4 كيفيات
يتم تكوين رقم العشرات ب 4 كيفيات
يتم تكوين رقم المئات ب 4 كيفيات
ومنه عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام من بين الأرقام 1 و 4 و 7 و 9 هو $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

6. خلاصة 2

في هذا النشاط الثاني كل نتيجة تسمى ترتيبية بتكرار ل 3 عناصر من بين 4 عناصر

7. تعريف

لتكن E مجموعة غير فارغة مكونة من n عنصر.
كل عنصر من شكل $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ حيث الأعداد $x_1, x_2, \dots, x_p$ عناصر مختلفة تسمى ترتيبية بدون تكرار ل p عنصر من E.
كل عنصر من شكل $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ حيث الأعداد $x_1, x_2, \dots, x_p$ عناصر مختلفة أو غير مختلفة تسمى ترتيبية بتكرار ل p عنصر من E.

8. خاصية

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو: $A_n^p = n.(n-1).(n-2)....(n-p+1)$
عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو: n^p .

9. تمرين تطبيقي

حدد عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام من بين الأرقام 0 و 1 و 2 و و 9.

10. الحل

هناك 10 اختيارات لرقم الوحدات

هناك 10 اختيارات لرقم العشرات

هناك 9 اختيارات لرقم المئات

إذن حسب مبدأ التعداد عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام من بين الأرقام 0 و 1 و 2 و و 9 هو $9 \times 10 \times 10 = 900$

الجزيرة محمد

الحصة رقم 3

III. التبادلات

1. تعريف و خاصية

كل ترتيب بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى تبديلة ل n عنصر
عدد التبادلات ل n عنصر هو إذن : $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

2. مثال 1

يشارك 10 فرسان في سباق. عدد إمكانيات ترتيب هؤلاء الفرسان، إذا افترضنا أنه لا يمكن للفرسان أن يحتلوا نفس الرتبة هو
 $10! = 10 \times 9 \times \dots \times 2 \times 1 = 3628800$

3. مثال 2

عدد إمكانيات جلوس 5 تلاميذ على 5 مقاعد هو $5! = 5 \times 4 \times \dots \times 2 \times 1 = 120$

4. ملاحظة

نصطلح أن $0! = 1$ و $1! = 1$.

5. خاصية

لكل عددين صحيحين طبيعيين n و p بحيث $1 \leq p \leq n$ ، لدينا $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

IV. التاليفات

1. تعريف

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر و ليكن p عدد صحيح طبيعي بحيث $p \leq n$
كل جزء من E مكون من p عنصر تسمى تاليفة ل p عنصر من بين n عنصر

2. نشاط

نضع $E = \{a, b, c, d\}$
الجزء $\{a, b, c\}$ تاليفة ل 3 عناصر من بين 4 عناصر و يتفرع عنها $3! = 6$ ترتيبية و هي :
 $(a, b, c) - (a, c, b) - (b, a, c) - (b, c, a) - (c, a, b) - (c, b, a)$
الجزء $\{a, b, d\}$ تاليفة ل 3 عناصر من بين 4 عناصر و يتفرع عنها $3! = 6$ ترتيبية و هي :
 $(a, b, d) - (a, d, b) - (b, a, d) - (b, d, a) - (d, a, b) - (d, b, a)$
الجزء $\{a, c, d\}$ تاليفة ل 3 عناصر من بين 4 عناصر و يتفرع عنها $3! = 6$ ترتيبية و هي :
 $(a, c, d) - (a, d, c) - (c, a, d) - (c, d, a) - (d, a, c) - (d, c, a)$
الجزء $\{b, c, d\}$ تاليفة ل 3 عناصر من بين 4 عناصر و يتفرع عنها $3! = 6$ ترتيبية و هي :
 $(b, c, d) - (b, d, c) - (c, b, d) - (c, d, b) - (d, b, c) - (d, c, b)$
بوضعنا C_4^3 عدد التاليفات ل 3 عناصر من بين 4 عناصر و حسب ما سبق لدينا العلاقة : $A_4^3 = 3! \cdot C_4^3$

$$C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!}$$

ومنه بصفة عامة لدينا الخاصية:

3. خاصية

لكل عددين حقيقيين n و p بحيث $p \leq n$ لدينا عدد التاليفات ل p عنصر من بين n عنصر هو $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

4. نتائج

لكل عددين حقيقيين n و p بحيث $p \leq n$ لدينا $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

لدينا $C_n^p = C_n^{n-p}$

لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $C_n^0 = C_n^n = 1$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $C_n^1 = n$

الجزء
محمّد

الحصة رقم 4

V. دراسة السحبات

1. السحب تأتيا

يحتوي كيس على n كرة $n \in \mathbb{N}^*$ ، عندما نختار p كرة من هذا الكيس تأتيا : هنا $p \leq n$ كل سحبة هي عبارة عن تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر و عدد السحبات هو C_n^p

2. السحب بالتتابع و بدون إحلال

يحتوي كيس على n كرة $n \in \mathbb{N}^*$ ، عندما نختار p كرة من هذا الكيس بالتتابع وبدون إحلال يكون $p \leq n$ و كل سحبة هي عبارة عن ترتيبية بدون تكرار و عددها هو A_n^p

3. السحب بالتتابع و بإحلال

يحتوي كيس على n كرة $n \in \mathbb{N}^*$ ، عندما نختار p كرة من هذا الكيس بالتتابع و بإحلال : هنا يمكن أن يكون $p \geq n$ كل سحبة هي عبارة عن ترتيبية بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر و عدد السحبات هو n^p

4. سلسلة تمارين حول التعداد

a. تمرين 1

يحتوي صندوق على 7 كرات : 4 منها بيضاء و 2 زرقاء و 1 خضراء.
نسحب في أن واحد كرتين من هذا الصندوق.
كم من سحب يمكن تحقيقه؟
كم من سحب تكون فيه الكرتان من نفس اللون؟
كم من سحب تكون فيه الكرتان مختلفتي اللون؟
كم من سحب يحتوي على الكرة الخضراء؟

b. الحل 1

c. تمرين 2

يحتوي كيس على 8 بیدقات مرقمة 1,2,3,...,8 نسحب بالتتابع و بدون إحلال بیدقتين من الكيس.
كم من حب يمكن تحقيقه؟
كم من سحب يكون فيه الرقمان زوجيين؟
كم من سحب يكون فيه الرقمان لهما نفس الزوجية؟
كم من سحب يحتوي على الرقم 1؟

d. الحل 2

e. تمرين 3

مجموعة من التلاميذ مكونة من 7 ذكور و 3 إناث. نختار من هذه المجموعة 3 أفراد.
ما هو عدد الاختيارات الممكنة؟
ما هو عدد الاختيارات التي ليست بكاملها ذكورا أو بكاملها إناثا؟

f. الحل 3

g. تمرين 4

34 أستاذ و 20 أستاذة لثانوية يريدون أن ينتخبوا من بينهم لجنة تضم ثلاثة أساتذة و أستاذتين ليكونوا أعضاء في المجلس الداخلي للثانوية. أوجد عدد طرق اختيار هذه اللجنة في الحالات التالية:
كل أستاذ و كل أستاذة موافق للانخراط في المجلس؟

8 أساتذة و 10 أساتذات امتنعوا عن الانخراط في هذا المجلس؟
السيدات A و B رفضتا الانخراط في نفس المجلس؟

h. الحل 4

i. تمرين 5

يحتوي صندوق على 8 كرات: 3 منها لونها أحمر و 4 لونها أخضر و واحدة لونها أزرق.
نسحب عشوائيا و ثانيا ثلاث كرات من الصندوق
حدد عدد الحالات الممكنة؟

حدد عدد الحالات للحصول على 3 كرات من نفس اللون؟
حدد عدد الحالات للحصول على كرتين حمراوين و كرة خضراء؟
نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق
اجب عن نفس الأسئلة السابقة
نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث كرات من الصندوق.
اجب عن نفس الأسئلة السابقة

j. الحل 5

k. حلول تمارين سلسلة التعداد

l. الحل 1

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!.5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

$$C_4^2 + C_2^2 = 6 + 1 = 7$$

$$C_7^2 - (C_4^2 + C_2^2) = 21 - 7 = 14$$

$$C_4^1 C_2^1 + C_4^1 C_1^1 + C_2^1 C_1^1 = (4 \times 2) + (4 \times 1) + (2 \times 1) = 8 + 4 + 2 = 14$$

$$C_1^1 C_6^1 = 1 \times 6 = 6$$

$$C_1^1 C_4^1 + C_1^1 C_2^1 = (1 \times 4) + (1 \times 2) = 6$$

m. الحل 2

$$A_8^2 = 8 \times 7 = 56$$

$$A_4^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$A_4^2 + A_4^2 = 24$$

$$2 \times A_1^1 A_7^1 = 2 \times 1 \times 7 = 14$$

n. الحل 3

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

نحدد أولا عدد الاختيارات التي بكاملها إنانا هو $C_3^3 = 1$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

$$C_{10}^3 - (C_7^3 + C_3^3) = 120 - 36 = 84$$

o. الحل 4

$$C_{34}^3 C_{20}^2$$

$$C_{26}^3 C_{10}^2$$

عدد اللجن التي تضم في آن واحد السيدتان A و B هو $C_2^2 C_{34}^3$

و منه عدد اللجن التي لا تضم السيدتان A و B هو $C_{34}^3 C_{20}^2 - C_{34}^2 C_2^2 = 1130976$

طريقة أخرى: $C_{34}^3 C_1^1 C_{18}^1$ هو عدد الجن التي تضم 3 اساتذة و السيدة A و غير السيدة B.

و $C_{34}^3 C_1^1 C_{18}^1$ هو عدد الجن التي تضم 3 اساتذة و السيدة B و غير السيدة A .

و $C_{34}^3 C_{18}^2$ هو عدد اللجن التي تضم 3 اساتذة و أستاذتين غير A و غير B.

و منه العدد المطلوب هو : $C_{34}^3 C_1^1 C_{18}^1 + C_{34}^3 C_1^1 C_{18}^1 + C_{34}^3 C_{18}^2 = 1130976$

p. الحل 5

السحب تأنيا

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$$

$$C_4^3 + C_3^3$$

$$C_4^1 C_3^2$$

السحب بالتتابع و بدون احلال

$$A_8^3$$

$$A_4^3 + A_3^3$$

$$C_3^1 A_4^1 A_3^2 = C_3^2 A_4^1 A_3^2$$

السحب بالتتابع و بإحلال

$$8 \times 8 \times 8 = 8^3$$

$$3 \times 3 \times 3 + 4 \times 4 \times 4 + 1 \times 1 \times 1 = 3^3 + 4^3 + 1^3$$

$$(4 \times 3 \times 3) \times 3$$