

I - نهاية لا منتهية لدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

(1) نشاط تمهيدى :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^2$

أ - أتمم الجدول التالي :

x	10^8	2×10^{50}	5×10^{120}	4×10^{300}	3×10^{600}	6×10^{1000}
$f(x)$						

نلاحظ أنه من خلال الجدول أنه عندما يأخذ x قيما أكبر فأكثر فإن $f(x)$ قيما أكبر فأكثر ؛ أي حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$.

نقول إن نهاية $f(x)$ حينما تؤول x إلى $+\infty$ هي $+\infty$.

ونكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب - أتمم الجدول التالي :

x	-10^8	-2×10^{50}	-5×10^{120}	-4×10^{300}	-3×10^{600}	-6×10^{1000}
$f(x)$						

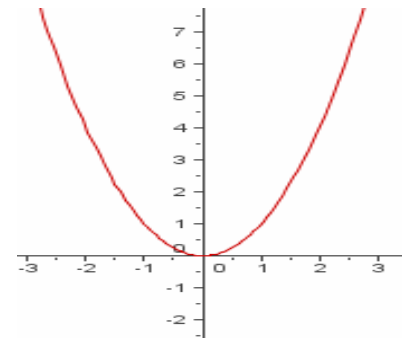
نلاحظ أنه من خلال الجدول أنه حينما تؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$.

نقول إن نهاية $f(x)$ حينما تؤول x إلى $-\infty$ هي $+\infty$.

ونكتب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

ج - أنشئ التمثيل المبياني للدالة f واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

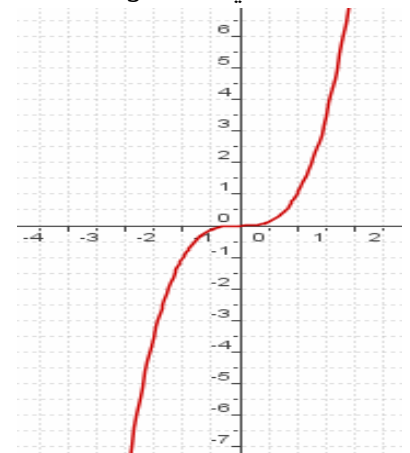
من خلال التمثيل المبياني للدالة f أيضا نلاحظ أن : حينما تؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ و حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$.
إذن من خلال التمثيل المبياني للدالة f نستنتج أن :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ وأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



2 - أنشئ التمثيل المبياني للدالة g المعرفة بما يلي واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

التمثيل المبياني للدالة g :

من التمثيل المبياني للدالة g نستنتج أن :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$



(2) نهايات هامة :

نقبل النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ إذا كان n عدد زوجي
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عدد فردي .

II - نهاية منتهية لدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

(1) نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x}$

أ - أتمم الجدول التالي :

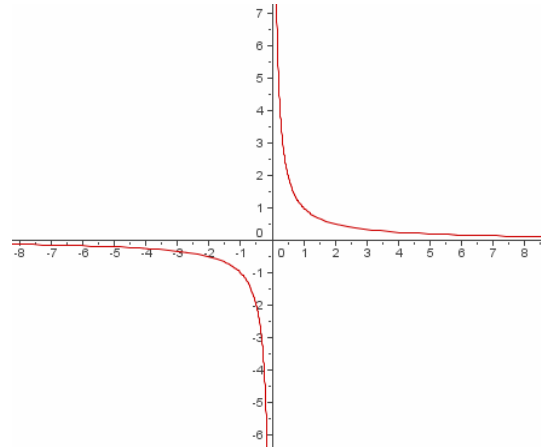
x	10^8	2×10^{50}	5×10^{120}	4×10^{300}	3×10^{600}	6×10^{1000}
$f(x)$						

نلاحظ أنه من خلال الجدول أنه عندما يأخذ x قيمة أكبر فأكثر فإن $f(x)$ تقترب من الصفر؛ أي حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى 0 .

نقول إن نهاية $f(x)$ حينما تؤول x إلى $+\infty$ هي 0 ونكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

ب - أنشئ التمثيل المبياني للدالة f واستنتج : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

من خلال التمثيل المبياني للدالة f أيضا نلاحظ
 أن : حينما تؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى 0
 و حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول أيضا إلى 0 .
 إذن من خلال التمثيل المبياني للدالة f نستنتج أن :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



(2) ترميز واصطلاحات :

النهية المنتهية عند $+\infty$:

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع : $]a; +\infty[$.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ أو $\lim_{+\infty} f(x) = l$

النهية المنتهية عند $-\infty$:

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع : $]-\infty; a]$.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ أو $\lim_{-\infty} f(x) = l$

(3) نهايات هامة :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

$$. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

(4) خاصيات :

1. إذا كانت لدالة عددية نهاية l في $+\infty$ فإن هذه النهاية وحيدة .

2. إذا كانت لدالة عددية نهاية l في $-\infty$ فإن هذه النهاية وحيدة .

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0$$

تمرين تطبيقي :

$$\text{بين أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 1}{x^2} = -3$$

III - نهاية منتهية ونهاية لا منتهية لدالة f في نقطة :

(1) نهاية منتهية لدالة f في نقطة :

لتكن f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع : $]a - \alpha; a + \alpha[$ أو مجموعة من نوع : $]a - \alpha; a + \alpha[- \{a\}$ ؛ $(\alpha > 0)$ ؛ وليكن l عددا حقيقيا .

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى a فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ أو $\lim_a f(x) = l$.

خاصية :

إذا كانت لدالة عددية f نهاية l في a فإن هذه النهاية وحيدة .

نهاية هامة :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$.

(2) نهاية لا منتهية لدالة f في نقطة :

لتكن f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع : $]a - \alpha; a + \alpha[$ أو مجموعة من نوع : $]a - \alpha; a + \alpha[- \{a\}$ ؛ $(\alpha > 0)$.

• إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ حينما تؤول x إلى a فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_a f(x) = +\infty$.

• إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ حينما تؤول x إلى a فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ أو $\lim_a f(x) = -\infty$.

IV - النهاية على اليمين - النهاية على اليسار :

(1) نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x}$.

من خلال التمثيل المبياني للدالة f نلاحظ أن : حينما تؤول

x إلى 0 على اليمين فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$. نقول إن

نهاية f حينما تؤول x إلى 0 على اليمين هي $+\infty$

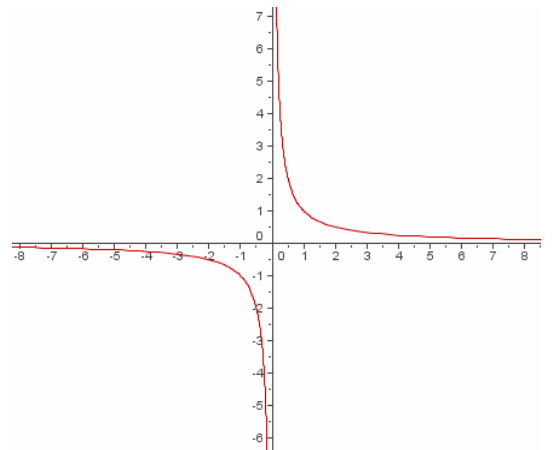
ونكتب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

كما نلاحظ أن : حينما تؤول x إلى 0 على اليسار

فإن $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$. نقول إن نهاية f حينما تؤول x

إلى 0 على اليسار هي $-\infty$.

ونكتب : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.



(2) ترميز واصطلاحات :

ليكن l و a عددين حقيقيين .

• إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

• إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ حينما تؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.
- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ حينما تؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.
- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ حينما تؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.
- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ حينما تؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

(3) نهايات هامة :

ليكن n عددا صحيحا طبعيا غير منعدم لدينا :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ إذا كان n عددا زوجيا .
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ إذا كان n عددا فرديا .
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

(4) خاصيات :

1. تكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ إذا وفقط إذا كان : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$.
2. تكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ إذا وفقط إذا كان : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$.
3. تكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ إذا وفقط إذا كان : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$.

تمارين تطبيقية :

$$(1) \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي : } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & ; \quad x > 0 \\ f(x) = x^3 & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

احسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$(2) \text{ نعتبر الدالة } g \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بما يلي : } g(x) = \frac{x^2 + x}{|x|}$$

أ - أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

ب - احسب : $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

ج - هل الدالة g تقبل نهاية في 0 .

V - العمليات على النهايات :

الجدول التالي يلخص العمليات على النهايات ونتائجه صالحة سواء كانت x تؤول إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ أو إلى a إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار .

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية $\frac{1}{g}$	نهاية $f \times g$	نهاية λf ($\lambda \neq 0$)	نهاية $f + g$	نهاية g	نهاية f
$\frac{l}{l'}$	$\frac{1}{l'}$	$l \times l'$	λl	$l + l'$	$l' (l' \neq 0)$	l
0	0	$+\infty l > 0$; $-\infty l < 0$;	λl	$+\infty$	$+\infty$	$l (l \neq 0)$
0	0	$-\infty l > 0$; $+\infty l < 0$;	λl	$-\infty$	$-\infty$	$l (l \neq 0)$
شكل غير محدد	0	$+\infty$	$+\infty$; $\lambda > 0$ $-\infty$; $\lambda < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	0	$+\infty$	$-\infty$; $\lambda > 0$ $+\infty$; $\lambda < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	0	$-\infty$	$+\infty$; $\lambda > 0$ $-\infty$; $\lambda < 0$	شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
0	0	شكل غير محدد	0	$+\infty$	$+\infty$	0
0	0	شكل غير محدد	0	$-\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$; $l > 0$ $-\infty$; $l < 0$	$+\infty$	0	λl	l	0^+	$l (l \neq 0)$
$-\infty$; $l > 0$ $+\infty$; $l < 0$	$-\infty$	0	λl	l	0^-	$l (l \neq 0)$

ملاحظة :

الأشكال غير المحددة هي : $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0 \times \infty$ و $(-\infty) - (-\infty)$ و $(+\infty) - (+\infty)$ و $(-\infty) + (+\infty)$ وهي تعني أنه لا يمكن حساب النهاية باستعمال هذه العملية وينبغي استعمال طريقة أخرى لحساب النهاية .

تمارين تطبيقية :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

VI - نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدوال اللاجذرية والدوال المثلثية :

1 (نهايات الدوال الحدودية :

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

نعتبر الحدودية : $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ حيث $a_n \neq 0$.

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow a} P(x) = \lim_{x \rightarrow a} P(a) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

بتعبير آخر :

نهاية دالة حدودية حينما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية الحد الذي له أعلى درجة ؛ ونهاية دالة حدودية في a

حيث a عدد حقيقي هي $P(a)$

أمثلة :

2 (نهايات دوال جذرية :

3 (نهايات دوال لا جذرية :

اليمني محمد www.sbaysite.com

4) نهايات دوال مثلثية :

نقبل النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

VII - الترتيب والنهايات :

نقبل الخاصيات التالية :

خاصيات :

- لتكن f و g و h ثلاث دوال معرفة على مجال من نوع $I = [a; +\infty[$.
- 1 (إذا كان : $g(x) \leq f(x)$ لكل x من I و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)
 - 2 (إذا كان : $f(x) \leq g(x)$ لكل x من I و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$)
 - 3 (إذا كان : $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ لكل x من I و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$)
 - 4 (إذا كان : $|f(x) - l| \leq g(x)$ لكل x من I و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$)

ملاحظة :

هذه الخاصيات تبقى صالحة إذا كانت x تؤول إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار.

تطبيقات :

1 (احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$)

2 (بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2$)

لدينا : $|\sin x - 2| \leq |\sin x| + 2$ ؛ كما لدينا : $\left| \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| = \left| \frac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right| = \frac{|\sin x - 2|}{x^2 + 1}$

وبما أن $|\sin x| \leq 1$ لكل x من $\mathbb{R}$ فإن : $|\sin x - 2| \leq |\sin x| + 2 \leq 3$

إذن : $\left| \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| = \frac{|\sin x - 2|}{x^2 + 1} \leq \frac{3}{x^2 + 1}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 1} = 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2$

3 (نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{2 - \cos x} - 1}{x^2}$)

أ - حدد : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب - بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^* : |f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) - \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{2 - \cos x} - 2}{x^2} = \frac{-\cos x - 2}{x^2(\sqrt{2 - \cos x} + 2)} \leq 0$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) \leq \frac{1}{x^2}$ (1)

ولدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{2 - \cos x}}{x^2} \geq 0$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : -\frac{1}{x^2} \leq f(x)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\forall x \in \mathbb{R}^* : -\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : |f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

نهاية الدرس