

المجموعات $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$

إعتبرات تربوية:

عن التوجيهات التربوية العامة لتدريس مادة الرياضيات

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- كتابة و ترميز. - أمثلة من أعداد لاجذرية. - العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ وخاصياتها. - القوى وخاصياتها ، قوى العدد 10 الكتابة العلمية لعدد عشري. - المتطابقات الهامة : $a^2 - b^2$ ، $(a-b)^2$ ، $(a+b)^2$ $a^3 - b^3$ ، $(a-b)^3$ ، $(a+b)^3$ $a^3 + b^3$ ، - النشر و التعميل.	- إدراك العلاقات بين الأعداد . - التمييز بين مختلف مجموعات الأعداد . - تحديد كتابة مناسبة لتعبير جبري حسب الوضعية المدروسة	- يتم توليف مختلف المعارف المكتسبة حول الأعداد ثم إدخال الرموز الخاصة بمجموعات هذه الأعداد والتمييز بينها . - إنطلاقا من أنشطة وتمارين يقدم الجذر المربع لعدد صحيح طبيعي الذي ليس له مربعا كاملا كمثال لعدد لاجذري . - إنطلاقا من أنشطة يتم التذكير بالعمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ و يختلف المتطابقات الهامة . - يجب تدعيم وصيانة خصائص وتقنيات العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ في مختلف فصول المقرر .

أنشطة تمهيدية:

نشاط 1:

$$-1 \text{ أحسب: } -2 - \frac{1}{4} - \frac{7}{6} + \frac{2}{3} \text{ و } \frac{5 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{3}{2}}$$

2- لتكن a و b و c أعداد حقيقية
أحسب $-2(a+b-c) - 3(a-b+c) + 4(5a-b)$

نشاط 2:

$$-1 \text{ أحسب: } \sqrt{5^2 \times 3^3} + \sqrt{75} - 11\sqrt{3} + 2\sqrt{243}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$-2 \text{ أ- أحسب } (2 - \sqrt{5})^2 \text{ ثم بسط}$$

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$\text{ب- بسط } \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} ; \sqrt{21 - 6\sqrt{6}}$$

3- اجعل المقام عددا جذريا للعددين

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \text{ الحقيقين}$$

$$-4 \text{ بين أن } \sqrt{7 + \sqrt{48}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}} = 4$$

نشاط 3:

$$-1 \text{ عمل } (x+2)^2 + x^2 - 4$$

$$; 27x^3 - 8 , (2x-1)^2 - (3x+2)^2$$

$$x^3 + 125 - 5x(x+5)$$

$$-3 \text{ نضع: } a+b=1 ; a^2+b^2=2 \text{ أحسب}$$

$$a^6 + b^6 ; a^4 + b^4$$

1 - مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و النسبية

*مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية هي $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots \rightarrow\}$

*الأعداد الصحيحة الطبيعية ومقابلاتها تكون مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية و يرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\leftarrow \dots; -4; -3; -1; 0; 1; 2; 3; 4 \dots \rightarrow\}$$

نرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة النسبية الغير المنعدمة بالرمز $\mathbb{Z}^$

$$\mathbb{Z}^* = \{\leftarrow \dots; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; \dots \rightarrow\}$$

ملاحظة : كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

نقول إن المجموعة $\mathbb{N}$ جزء من المجموعة $\mathbb{Z}$ أو المجموعة $\mathbb{N}$ ضمن المجموعة $\mathbb{Z}$

نتائج :

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} \quad , \quad \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset \quad , \quad \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$$

2-مجموعة الأعداد العشرية النسبية.

*مجموعة الأعداد العشرية النسبية هي $\mathbb{ID} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z} ; n \in \mathbb{N} \right\}$

ملاحظة :

- أ- العدد العشري له كتابة بعدد منته من الأرقام على يمين الفاصلة.
 - ب- كل عدد صحيح نسبي a هو عدد عشري نسبي (لأنه يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{10^0}$)
- إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID}$

3-مجموعة الأعداد الجذرية.

مجموعة الأعداد الجذرية هي $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} ; b \in \mathbb{N}^ \right\}$

$\frac{-3}{7}$ عدد جذري ، 6 عدد جذري ، -1.36 عدد جذري
 π ليس عددا جذريا $\sqrt{3}$ ليس عددا جذريا

نتائج :

*كل عدد عشري نسبي هو عدد جذري إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID} \subset \mathbb{Q}$.
 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\} \quad , \quad \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \emptyset \quad , \quad \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q} \quad *$

$\mathbb{Q}^+$ مجموعة الأعداد الجذرية الموجبة.

$\mathbb{Q}^-$ مجموعة الأعداد الجذرية السالبة و $\mathbb{Q}^*$ مجموعة الأعداد الجذرية الغير المنعدمة.

4-مجموعة الأعداد الحقيقية:

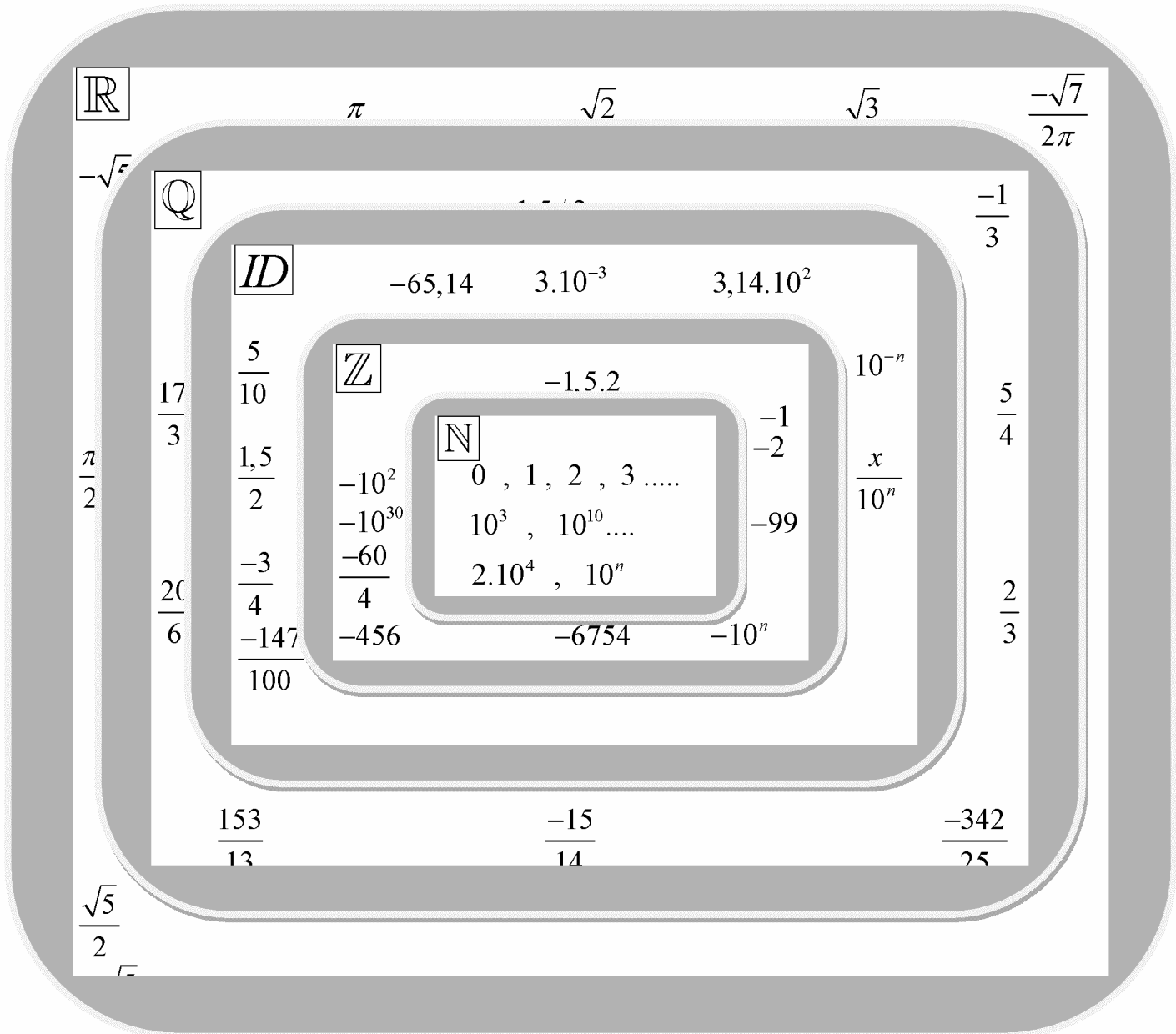
- $\sqrt{2}$ عدد لا جذري : أرسم مربع ضلعه 1 وحدد طول قطره

- نصف محيط دائرة شعاعها 1 هو عدد لا جذري يرمز له ب π

توجد مقادير لا يمكن التعبير عنها بأعداد جذرية، مثل هذه المقادير نعبّر عنها بأعداد لا جذرية.

الأعداد الجذرية والأعداد اللاجذرية تكون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

* كل عدد جذري هو عدد حقيقي ونكتب: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



نتائج: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ ، $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$ ، $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية الغير المنعدمة.

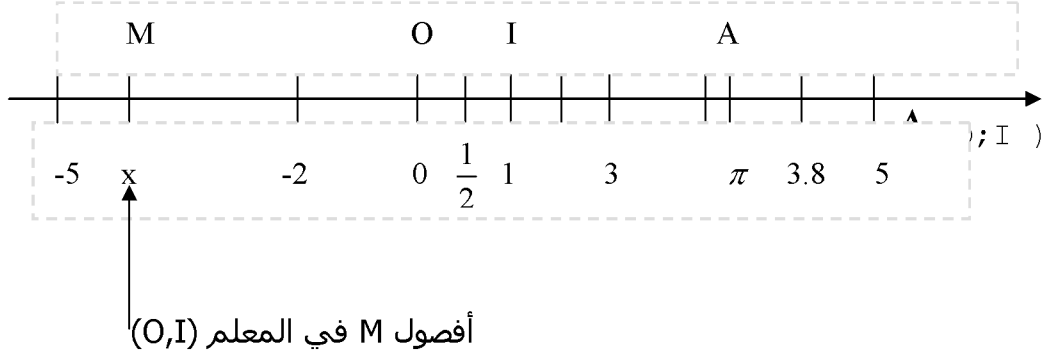
$\mathbb{R}^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة و $\mathbb{R}^-$ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

تمثيل المجموعة $\mathbb{R}$:

نمثل المجموعة $\mathbb{R}$ على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

كل نقطة من المستقيم $\Delta(O;I)$ تقبل عدداً وحيداً أفصولا لها

كل عدد حقيقي هو أفصول لنقطة وحيدة من المستقيم $\Delta(O;I)$



M هي النقطة ذات الأفصول x و نكتب $M(x)$

A هي النقطة ذات الأفصول π و نكتب $A(\pi)$.

II - العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ وخاصياتها.

2- الجمع والضرب.

أ- الجمع.

* الجمع تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $a+b=b+a$

* الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $(a+b)+c=a+(b+c)$

* 0 هو العنصر المحايد للجمع في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $0+a=a+0=a$

* لكل عدد حقيقي a مقابل هو -a : $-a+a=a+(-a)=0$

ب- الطرح.

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $a-b=a+(-b)$

ج- الضرب.

* الضرب تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $a \times b = b \times a$

* الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

* 1 هو العنصر المحايد لضرب في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $1 \times a = a \times 1 = a$

* لكل عدد حقيقي غير منعدم a مقلوب هو $\frac{1}{a}$ (a^{-1}) ولدينا $a^{-1} \times a = a \times a^{-1} = 1$

* الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$:

$$(b+c).a = ba+ca; a.(b+c) = ab+ac$$

د-الخارج .

ليكن a من $\mathbb{R}$ و b من $\mathbb{R}^*$ $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

ذ-قواعد .

* لتكن a و b و c من $\mathbb{R}$: $a=b$ تكافئ $a+c=b+c$

* لتكن a و b من $\mathbb{R}$ و c من $\mathbb{R}^*$: $a=b$ تكافئ $ac=bc$

* لكل a و b و c و d من $\mathbb{R}$

إذا كان $a=b$ و $c=d$ فإن $a+c=b+d$

إذا كان $a=b$ و $c=d$ فإن $ac=bd$

* $ab=0$ تكافئ $a=0$ أو $b=0$ ثم $ab \neq 0$ تكافئ $a \neq 0$ و $b \neq 0$

* لكل a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ تكافئ $ad=bc$

* a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$ ، $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$

* لكل a من $\mathbb{R}$ و b و c و d من $\mathbb{R}^*$ و $\frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b}$ و $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

3- الجذور المربعة :

أ- تعريف :

ليكن x من $\mathbb{R}^+$

العدد الحقيقي الموجب y الذي يحقق $y^2 = x$ يسمى الجذر المربع للعدد الموجب x .

نرمز للجذر مربع للعدد x بـ $\sqrt{x}$

$x = y^2$ و $y \geq 0$ تكافئ $y = \sqrt{x}$ ، $x \in \mathbb{R}^+$

ب-نتائج :

*- ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$:

$(y \neq 0) \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$; $\sqrt{x^2} = x$; $(\sqrt{x})^2 = x$; $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$

$\sqrt{x} = \sqrt{y}$ تكافئ $x = y$

• إذا كان x سالبا فإن $\sqrt{x^2} = -x$

ملاحظة : لكل عدد حقيقي موجب a يوجد عددا حقيقيان مربعهما يساوي a هما :

$\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

2- القوى :

أ- تعريف.

* ليكن a من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$(a \neq 0) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n$$

العدد a^n يسمى قوة العدد a ذات الأس n
العدد a^{-n} يسمى قوة العدد a ذات الأس $-n$

* ليكن a من $\mathbb{R}^*$ $a^0 = 1$

ب- نتائج.

x و y من $\mathbb{R}^*$ ولكل n و m من $\mathbb{Z}$

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$(x^n)^m = x^{n.m}$$

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

* لكل عدد حقيقي موجب x : $\sqrt{x^n} = \sqrt{x}^n$

ج- الكتابة العلمية لعدد عشري.

خاصية (مقبولة)

كل عدد عشري b موجب يكتب على شكل $a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية للعدد b

أمثلة

الكتابة العلمية للعدد 1740000 هي 1.74×10^6

الكتابة العلمية للعدد 0.000325 هي $3,25 \times 10^{-4}$

نتيجة:

كل عدد عشري b سالب يكتب على شكل $-a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

$$-0,000325 = -3,25 \times 10^{-4}$$

$$-1,74 \times 10^6 = -1740000$$

4- متطابقات هامة

ليكن a و b من $\mathbb{R}$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

5- النشر والتعميل

نشر جداء هو تحويله إلى مجموع

تعميل مجموع هو تحويله إلى جداء