

عناصر التوجيهات التربوية	مكونات المقرر الرسمي
✓ إن توظيف الترتيب في مقارنة بعض الأعداد وفي إثبات بعض العلاقات يعتبر من المهارات التي ينبغي الحرص على تنميتها وتثبيتها، كما أن تأويل علاقات من الشكل $x - a \leq r$ وانجاز بعض الإكبارات باستعمال المتفاوتات المثلثية وخاصيات القيمة المطلقة، من التقنيات الأساسية التي ينبغي تمرين التلميذ على استعمالها بشكل تدريجي. ✓ ينبغي ربط مفهوم القيمة المطلقة بالمسافة بين نقطتين على مستقيم مدرج. ✓ يمكن تقديم الخصائص المتعلقة بتأطير وتقريب مجموع عددين أو فرق عددين في الحالة العامة أما تأطير وتقريب جداء وخارج عددين حقيقيين فينبغي دراستها من خلال أمثلة عديدة مختارة تبين للتلاميذ الاحتياطات التي ينبغي اتخاذها وشروط صحة الاستدلالات. ✓ تعتبر الآلة الحاسبة أداة مساعدة في تناول المفاهيم السابقة (التأطير والتقريب...) غير أنه ينبغي التحقق من أن التلاميذ ملمون بالكتابة العلمية لعدد ومدركون أن الآلة الحاسبة تعطي في أغلب الأحيان تقريبا عشريا للنتيجة، لذا ينبغي إكساب التلاميذ التقنيات الخاصة بالآلة الحاسبة العلمية (الأوليات في العمليات، وظائف الملامس...)	✓ الترتيب و العمليات. ✓ القيمة المطلقة وخاصياتها. ✓ المجالات. ✓ التأطير والتقريب، التقريبات العشرية

الدرس 5: الترتيب في المجموعة IR

تقديم: كان الانسان منذ القدم، محتاجا إلى مقارنة المقادير من نفس النوع وخاصة الأطوال والمساحات والحجوم وترتيبها. وقد ازدادت أهمية الترتيب في المقارنات الإحصائية وتغيرات الدوال العددية وفي التحليل عامة، ومن بيم من اهتم بالترتيب ، الباحث Dedekind عندما أنشأ مجموعة الأعداد الحقيقية بواسطة التقطيعات وعرف بذلك ترتيبا كليا.

1. الترتيب في IR

نشاط:

1- رتب الأعداد التالية ترتيبا تزايديا : $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ و $\frac{1}{24}$ و $\frac{1}{22}$ و $\frac{1}{21}$ و $\frac{1}{23}$

2- ليكن a عددا حقيقيا. قارن: $a^2 + 1$ و $2a$

3- قارن العددين $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ و $2 + \sqrt{3}$

حل النشاط:

(1) لدينا: $40 > 24 > 23 > 22 > 21 > 20$ إذن $\frac{1}{40} < \frac{1}{24} < \frac{1}{23} < \frac{1}{22} < \frac{1}{21} < \frac{1}{20}$

(2) لدينا: $a^2 + 1 - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$ أي $a^2 + 1 - 2a \geq 0$ أي $a^2 + 1 \geq 2a$

(3) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (2 + \sqrt{3})^2 = (7 + 2\sqrt{10}) - (7 + 4\sqrt{3}) = 2(\sqrt{10} - 2\sqrt{3}) = 2(\sqrt{10} - \sqrt{12}) < 0$

فإن: $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 < (2 + \sqrt{3})^2$ وحيث أن: $2 + \sqrt{3} > 0$ و $\sqrt{5} + \sqrt{2} > 0$

فإن: $\sqrt{5} + \sqrt{2} < 2 + \sqrt{3}$

(1) تعريف: ليكن $a \in IR$ و $b \in IR$

✓ $a \leq b$ تعني $(a - b) \in IR^-$ أو $(b - a) \in IR^+$

✓ $a < b$ تعني $(a - b) \in IR^{*-}$ أو $(b - a) \in IR^{*+}$

ملاحظة: لكي نقارن بين عددين a و b ، أولا نحدد اشارتيهما. إذا كان $a \in IR^-$ و $b \in IR^+$ فإن: $a \leq b$

2. الترتيب و الجمع:

خاصية 1: ليكن $a \in IR$ و $b \in IR$ و $c \in IR$

$a \leq b$ تعني $a + c \leq b + c$

خاصية 2: ليكن $a \in IR$ و $b \in IR$ و $c \in IR$ و $d \in IR$

$$\text{إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \text{ فإن } a + c \leq b + d \text{ و}$$

(3) الترتيب و الضرب:

خاصية 1:

✓ ليكن $a \in IR$ و $b \in IR$ و $c \in IR^{*+}$

إذا كان $a \geq b$ فإن $ac \geq bc$

✓ ليكن $a \in IR$ و $b \in IR$ و $c \in IR^{*-}$

إذا كان $a \geq b$ فإن $ac \leq bc$

خاصية 2:

✓ ليكن $a \in IR^+$ و $b \in IR^+$ و $c \in IR^+$ و $d \in IR^+$

$$\text{إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \text{ فإن } ac \leq bd \text{ و}$$

✓ ليكن $a \in IR^-$ و $b \in IR^-$ و $c \in IR^-$ و $d \in IR^-$

$$\text{إذا كان } \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \text{ فإن } ac \geq bd \text{ و}$$

(4) الترتيب و المربع:

خاصية 1:

✓ ليكن $a \in IR^+$ و $b \in IR^+$

إذا كان $a \leq b$ فإن: $a^2 \leq b^2$

خاصية 2:

✓ ليكن $a \in IR^-$ و $b \in IR^-$

إذا كان $a \leq b$ فإن: $a^2 \geq b^2$

(5) الترتيب و الجذور المربعة:

خاصية: ليكن $a \in IR^+$ و $b \in IR^+$. إذا كان $a \leq b$ فإن: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

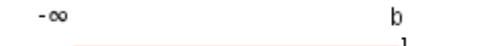
(6) الترتيب و المقلوب:

خاصية: ليكن $a \in \mathbb{R}^+$ و $b \in \mathbb{R}^+$ و $ab > 0$ (أي a و b لهما نفس الإشارة)

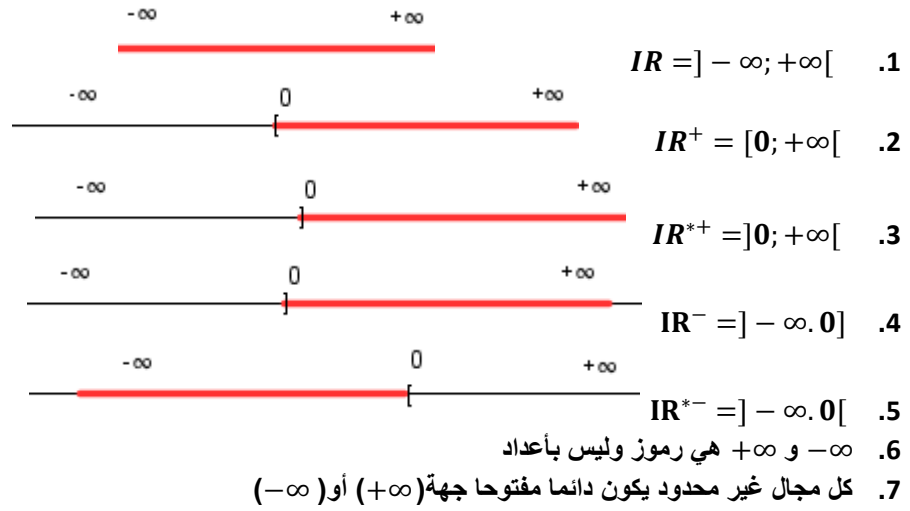
$$a \leq b \text{ تكافئ } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

II. Les Intervalles المجالات

(1) المجالات: ليكن $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ حيث $a < b$

قراءة وتمثيل على المستقيم	ترميزها	مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث:
يقرأ المجال المغلق الذي طرفاه a و b 	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
يقرأ المجال المفتوح الذي طرفاه a و b 	$]a; b[$	$a < x < b$
يقرأ المجال المفتوح على اليمين الذي طرفاه a و b 	$[a; b[$	$a \leq x < b$
يقرأ المجال المفتوح على اليسار الذي طرفاه a و b 	$]a; b]$	$a < x \leq b$
يقرأ المجال a زائد ما لانهاية، مغلق في a 	$[a; +\infty[$	$x \geq a$
يقرأ المجال a زائد ما لانهاية، مفتوح في a 	$]a; +\infty[$	$x > a$
يقرأ المجال ناقص ما لانهاية b، مغلق في b 	$] - \infty; b]$	$x \leq b$
يقرأ المجال ناقص ما لانهاية b، مفتوح في b 	$] - \infty; b[$	$x < b$

ملاحظات:



تطبيق: نعتبر المحور $(O; I)$ (Δ)

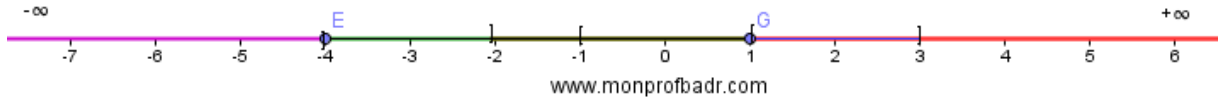
(1) مثل الأعداد 1 و 2 و 3 و 4 على المحور.

(2) حدد على المحور بألوان مختلفة المجالات التالية: $] - \infty; 4]$ ، $] - 4; 1[$ ، $[1; 3]$ ، $] - 2; +\infty[$

(3) حدد : $[1; 3] \cup] - 2; +\infty[$ ، $] - \infty; -4] \cap [1; 3]$ ، $] - 4; 1[\cap] - 2; +\infty[$

حل التطبيق:

(1 و 2)



$$] - \infty; -4] \cap [1; 3] = \emptyset$$

$$[1; 3] \cup] - 2; +\infty[=] - 2; +\infty[\quad (3)$$

$$] - 4; 1[\cap] - 2; +\infty[=] - 2; 1[$$

(2) القيمة المطلقة:

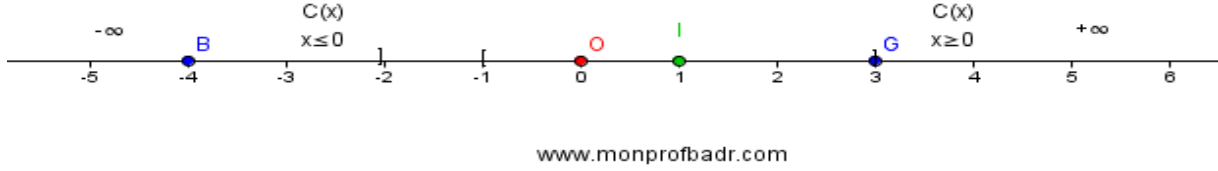
نشاط: نعتبر $(O; I)$ (Δ) مستقيما مدرجا .

(1) أنشئ النقط $A(3)$ و $B(-4)$ و $C(x)$ مع $x \in IR$

(2) أحسب المسافة OA و OB و OC

حل نشاط:

(1)



$$OB = -(-4)OI = 4OI \quad \text{و} \quad OA = 3OI \quad (2)$$

$$OC = \begin{cases} xOI & ; x \geq 0 \\ -xOI & ; x < 0 \end{cases}$$

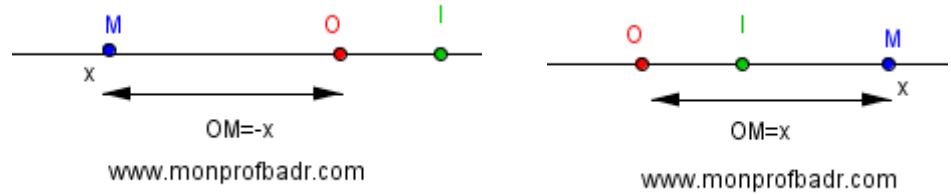
$$C = |x| \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

اذن

تعريف: ليكن $(O; I)$ مستقيما مدرجا.

القيمة المطلقة لكل عدد حقيقي x هي المسافة بين النقطة M التي أفصولها x و النقطة O .

نرمز للقيمة المطلقة بـ $|x|$ ونكتب : $OM = |x|$



ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = x \quad \text{إذا كان } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{إذا كان } x \leq 0$$

أمثلة: $|-8| = 8$; $|1| = 1$; $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

$$|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \quad ; \quad |4 - \sqrt{2}| = 4 - \sqrt{2}$$

خاصيات: ليكن $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$

$$|-a| \leq a \leq |a| ; |a| = |-a| ; \sqrt{a^2} = |a| ; |a^2| = a^2 \quad \checkmark$$

$$a = 0 \text{ تكافئ } |a| = 0 \quad \checkmark$$

$$a = -b \text{ أو } a = b \text{ تكافئ } |a| = |b| \quad \checkmark$$

$$|ab| = |a||b| \quad \checkmark$$

برهان:

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} = |a||b|$$

$$b \neq 0 \text{ مع } \left| \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b|} \quad \checkmark$$

برهان:

$$\left| \frac{1}{b} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{b} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{b^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{b^2}} = \frac{1}{|b|}$$

$$b \neq 0 \text{ مع } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \checkmark$$

برهان:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \left| a \times \frac{1}{b} \right| = |a| \times \left| \frac{1}{b} \right| = |a| \times \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \quad \checkmark$$

(3) الترتيب و القيمة المطلقة:

ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}^{+*}$

$$x \in [-r; r] \text{ أي } -r \leq x \leq r \text{ يعني } |x| \leq r \quad \checkmark$$



www.monprofbadr.com

$$x \in]-r; r[\text{ أي } -r < x < r \text{ يعني } |x| < r \quad \checkmark$$



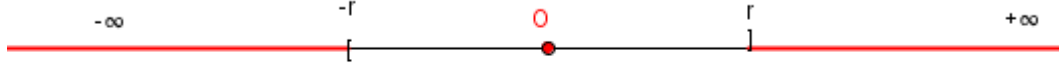
www.monprofbadr.com

✓ $|x| \geq r$ تكافئ $x \geq r$ أو $x \leq -r$ أي: $x \in [r; +\infty[$ أو $x \in]-\infty; -r]$



www.monprofbadr.com

✓ $|x| > r$ تكافئ $x > r$ أو $x < -r$ أي: $x \in]r; +\infty[$ أو $x \in]-\infty; -r[$



www.monprofbadr.com

أمثلة:

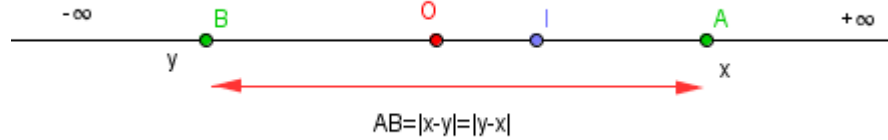
✓ مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $|x - 1| \leq 2$ هي $-2 \leq x - 1 \leq 2$ أي: $-1 \leq x \leq 3$

✓ مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $|x + 3| \leq 5$ هي $-5 \leq x + 3 \leq 5$ أي: $-8 \leq x \leq 2$

(4) المسافة بين عددين:

ليكن $(\Delta)(O; I)$ مستقيما مدرجا. لتكن $A(x)$ و $B(y)$

www.monprofbadr.com



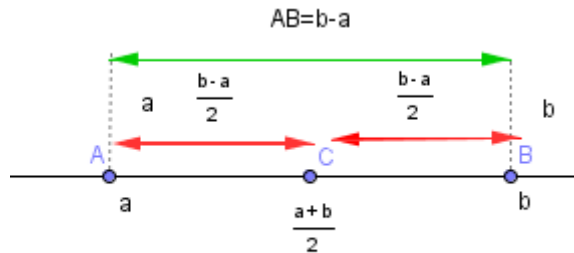
(5) مركز مجال، شعاع مجال، سعة مجال:

ليكن I مجالا طرفاه a و b . نضع $I = [a, b]$

✓ العدد $\frac{a+b}{2}$ مركز المجال I وهو العدد الذي يبعد بنفس المسافة عن a و b .

✓ العدد $b - a$ سعة المجال I وهو المسافة بين a و b .

✓ العدد $\frac{b-a}{2}$ شعاع المجال I وهو المسافة بين مركزه وأحد طرفيه.



www.monprofbadr.com

تطبيق:

(1) حدد مركز وشعاع وسعة المجالات التالية: $[1; 3[$; $[2; 6]$; $] - 4; -2[$

(2) ليكن $a \in IR$ و $b \in IR$ $a < b$

بين أن $x \in [a; b]$ تكافئ $|x - \frac{b+a}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$

حل التطبيق:

(1-1) نعتبر المجال $[1; 3[$:

$$\text{مركزه: } C = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{سعته: } D = 3 - 1 = 2 \quad \text{شعاعه: } r = \frac{3-1}{2} = 1$$

(2-1) نعتبر المجال $[2; 6]$:

$$\text{مركزه: } C = \frac{2+6}{2} = 4 \quad \text{سعته: } D = 6 - 2 = 4 \quad \text{شعاعه: } r = \frac{6-2}{2} = 2$$

(3-1) نعتبر المجال $] - 4; -2[$:

$$\text{مركزه: } C = \frac{-4-2}{2} = -3 \quad \text{سعته: } D = -2 - (-4) = 2 \quad \text{شعاعه: } r = \frac{-2-(-4)}{2} = 1$$

(2) لنبين أن $x \in [a; b]$ تكافئ $|x - \frac{b+a}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$

$$\frac{a-b}{2} \leq x - \frac{b+a}{2} \leq \frac{b-a}{2} \quad \text{تكافئ} \quad |x - \frac{b+a}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$\text{تكافئ} \quad \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \leq x - \frac{b+a}{2} + \frac{b+a}{2} \leq \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2} \quad \text{وتكافئ: } a \leq x \leq b \quad \text{أي } x \in [a; b]$$

III. التآطيرات والتقريبات:

(1) التآطير :

نشاط:

أ- حدد مجال مفتوح سعته 10^2 ويحتوي على $\frac{2}{3}$

ب- علما أن $1.41 \leq \sqrt{2} \leq 1.42$. حدد مجالا مغلقا يحتوي على $3\sqrt{2}$ سعته $7 \cdot 10^2$

حل نشاط:

أ- لدينا: $\frac{2}{3} = 0.6666$ وبما أن $0.66 < \frac{2}{3} < 0.67$ وأن $D = 0.67 - 0.66 = 0.01 = 10^{-2}$

اذن المجال المفتوح الذي يحتوي على $\frac{2}{3}$ وسعته 10^{-2} هو : $]0.66; 0.67[$

ب- لدينا : $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ اذن $3 \times 1.41 < 3\sqrt{2} < 3 \times 1.42$

أي: $4.23 < 3\sqrt{2} < 4.26$ ومنه : $-4.22 \leq -4.23 < 3\sqrt{2} < -4.26 \leq -4.29$

وبما أن : $D = -4.22 - (-4.29) = 0.07 = 7 \times 10^{-2}$

اذن المجال المغلق الذي يحتوي على $3\sqrt{2}$ سعته 7.10^2 هو : $[-4.29; -4.22]$

تعريف:

كل كتابة من الكتابات التالية : $a \leq x \leq b$ أو $a \leq x < b$ أو $a < x \leq b$ أو $a < x < b$

تسمى **تأطير للعدد x سعته $D = b - a$**

مثال: لدينا $3.14 < \pi < 3.15$ تأطير للعدد π سعته 10^{-2}

ولدينا: $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ تأطير للعدد $\sqrt{3}$ سعته 10^{-1}

تطبيق: ليكن $x \in [2; 5]$ نضع: $A = \frac{1-2x}{x-1}$. حدد تأطير A سعته $\frac{3}{4}$

حل التطبيق: لدينا $A = \frac{-2x+2-1}{x-1} = \frac{-2x+2}{x-1} - \frac{1}{x-1} = -2 - \frac{1}{x-1}$

ولدينا $2 \leq x \leq 5$ تكافئ $1 \leq x - 1 \leq 4$

اذن $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} \leq -\frac{1}{4}$ تكافئ $-1 \leq \frac{1}{x-1} \leq -\frac{9}{4}$ تكافئ $-3 \leq -2 - \frac{1}{x-1} \leq -\frac{9}{4}$ تكافئ $-3 \leq A \leq -\frac{9}{4}$

سعته: $-\frac{9}{4} + 3 = -\frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{3}{4}$

اذن تأطير A سعته $\frac{3}{4}$ هو $-3 \leq A \leq -\frac{9}{4}$

(2) التقريبات-التقريبات العشرية :

أ- التقريبات:

خاصية: ليكن $a \leq x \leq b$ أو $a \leq x < b$ أو $a < x \leq b$ أو $a < x < b$

✓ b هو قيمة مقربة للعدد x **بإفراط بدقة $b - a$**

✓ a هو قيمة مقربة للعدد x **بتفريط بدقة $b - a$**

✓ العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x **بالدقة $\frac{b-a}{2}$**

مثال: من التأطير $2.645 \leq \sqrt{7} \leq 2.646$ نستنتج أن :

✓ العدد 2.646 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بإفراط بدقة 10^{-3}

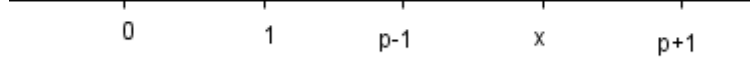
✓ العدد 2.546 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بتفريط بدقة 10^{-3}

✓ العدد 2.6455 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بدقة 5×10^{-4}

ب- التقريب العشري لعدد حقيقي :

الجزء الصحيح لعدد حقيقي: لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي وحيد p بحيث : $p \leq x < p + 1$

p يسمى الجزء الصحيح للعدد x ونكتب : $E(x) = p$



مثال:

لدينا : $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ ومنه فإن : $E(\sqrt{2}) = 1$

ولدينا : $0 \leq -\frac{1}{3} \leq -1$ ومنه فإن : $E(-\frac{1}{3}) = -1$

تعريف: ليكن x عددا حقيقيا و x عددا صحيحا طبيعيا و p الجزء الصحيح للعدد الحقيقي $10^n \cdot x$ أي :
 $E(10^n x) = p$

لدينا : $p \leq 10^n \cdot x < p + 1$ ومنه فإن : $p \cdot 10^{-n} \leq x < (p + 1) \cdot 10^{-n}$

العدد العشري $p \cdot 10^{-n}$ يسمى **التقريب العشري للعدد x بتفريط بدقة 10^{-n}** 
العدد العشري $(p + 1) \cdot 10^{-n}$ يسمى **التقريب العشري للعدد x بإفراط بدقة 10^{-n}** 

مثال: لدينا $1.731 < \sqrt{3} < 1.733$

اذن : $1731 \times 10^{-3} < \sqrt{3} < (1.733 + 1) \times 10^{-3}$

العدد 1.733 هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بإفراط بدقة 10^{-3} 

العدد 1.733 هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بتفريط بدقة 10^{-3} 

انتهى الدرس

للمزيد من الدروس، زورونا على الموقع :

www.monprofbadr.com