

المرجح

I - نقطة متزنة - مرجح نقطتين متزنتين :

نشاط تمهيدي : (ينجز في دفتر التمارين تمرين 1 و تمرين 2)

تمرين 1 :

نعلق في الطرفين A و B لساق متجانسة جسمين كتلتها m_A و m_B على التوالي .
(انظر الشكل) حسب قانون أرخميدس فإن التوازن يحصل حينما نعلق الساق

في نقطة G بحيث : $m_A GA = m_B GB$.

1 (علل العلاقة المتجهية : $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

2 (ما هو وضع النقطة G في حالة $m_A = m_B$ ؟

3 (نفترض أن : $m_A = 0,25Kg$ وأن $\overrightarrow{GB} = -5\overrightarrow{GA}$ ؛ ما هي قيمة m_B ؟

4 (إذا كان : $2m_B = 3m_A = 6Kg$ فما هو وضع النقط A و B و G علما أن $AB = 12cm$

تمرين 2 :

A و B نقطتان مختلفتان في المستوى .

1 (بين أنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئ هذه النقطة .

2 (ليكن α و β عددين حقيقيين غير منعدمين .

أ - بين أن : $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta) \overrightarrow{AM} = \beta \overrightarrow{AB}$.

ب - استنتج أنه إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (1) .

ج - استنتج أنه إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فإنه لا توجد أية نقطة G تحقق العلاقة (1) .

د - بين أن : $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ تكافئ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB})$ لكل نقطة O من المستوى .

1 (نقطة متزنة :

تعريف : لنكن A نقطة من المستوى (P) و α عدد حقيقي . الزوج $(A; \alpha)$ يسمى نقطة متزنة ، ونقول إن A معينة بالمعامل α ، أو أن α هو وزن النقطة A .

2 (مرجح نقطتين متزنتين :

خاصية وتعريف :

لنكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ نقطتين متزنتين بحيث : $\alpha + \beta \neq 0$. توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ ، كما تسمى أيضا مرجح النظمة المتزنة : $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$.

ملاحظات :

1. العلاقة $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ تبين أن النقطة G وحيدة كما تمكن من إنشاء النقطة G .

2. مرجح النظمة المتزنة $\{(A; \alpha); (B; 0)\}$ (حيث $\alpha \neq 0$) هي النقطة $G = A$ ، ومرجح النظمة المتزنة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ هي النقطة $G = B$.

3. نفترض أن : $\alpha + \beta = 0$ وأن $A \neq B$. حدد طبيعة المجموعة $E = \{M \in (P) / \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}\}$.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{MA} - \alpha \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0$$

إذن : إذا كان $\alpha = 0$ فإن $E = (P)$ وإذا كان $\alpha \neq 0$ فإن $E = \Phi$.
 في هاتين الحالتين نقول إن النقطتين المتزنيتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ ليس لهما مرجح .
 حالة خاصة :
 إذا كان $\alpha = \beta$ فإن مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; \alpha)$ و $(B; \alpha)$ يسمى مركز ثقل النقطتين A و B .
 وفي هذه الحالة لدينا : $\alpha \overrightarrow{GA} + \alpha \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
 إذن في هذه الحالة G هو منتصف القطعة $[AB]$.

(3) خاصيات :

1. صمود المرجح :

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$ و G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ حيث $\alpha + \beta \neq 0$.
 حدد مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; k\alpha)$ و $(B; k\beta)$. ما تستنتج ؟
 خاصية :
 مرجح نقطتين متزنيتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الحقيقي غير المنعدم .
 بتعبير آخر :
 $G \Leftrightarrow (B; \beta)$ و $(A; \alpha)$ مرجح النقطتين المتزنيتين $(B; k\beta)$ و $(A; k\alpha)$

$\forall k \in \mathbb{R}^*$

ملاحظة :

G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; \alpha)$ و $(B; \alpha)$ ؛ $(\alpha \neq 0)$ يكافئ G مرجح $(A; 1)$ و $(B; 1)$.
 يكافئ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ يكافئ G منتصف القطعة $[AB]$ ونقول أيضا G مركز ثقل النقطتين المتزنيتين $(A; \alpha)$ و $(B; \alpha)$.

تمرين تطبيقي :

تمرين 3 : تمرين 11 ص 96 (من الكتاب المدرسي : في رحاب الرياضيات)

2. الخاصية المميزة للمرجح :

أنشطة :

1 (A و B نقطتان من المستوى و G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; 3)$ و $(B; 2)$.
 احسب $\overrightarrow{MG}$ بدلالة $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ لكل نقطة M من المستوى .

الجواب : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})$ لكل نقطة M من المستوى .

2 (لتكن A و B نقطتين من المستوى و α و β عدنان حقيقيان بحيث : $\alpha + \beta \neq 0$.
 بين أن G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا وفقط إذا كان : $(\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ لكل نقطة M من المستوى .

خاصية :

A و B نقطتان من المستوى و α و β عدنان حقيقيان بحيث : $\alpha + \beta \neq 0$.
 يكون G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا وفقط إذا كان : $(\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ لكل نقطة M من المستوى .
 ملاحظات :

1 - إذا كان $M = A$ فإن $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$

2 - إذا كان $M = B$ فإن $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}$

وهذا يبين أن (في حالة $A \neq B$) لدينا $G \in (AB)$ أي أن النقط A و B و G مستقيمية .
 تطبيقات :

1 (لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P) . ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$ ، و G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; 3)$ و $(B; -5)$.

حدد المجموعة : $E = \{M \in (P) / \|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\|\}$

II - مرجح ثلاث نقط متزنة :

أنشطة تمهيدية :

1 - لتكن ABC مثلثا في المستوى .

بين أنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ وأنشئ النقطة G .

2 - لتكن A و B و C ثلاث نقط معلومة من المستوى . α و β و γ أعدادا حقيقية .

أ - بين أنه إذا كان $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

ب - إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فهل توجد نقطة G بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ؟

(1) خاصية وتعريف :

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى . α و β و γ أعدادا حقيقية .

إذا كان $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ ، كما تسمى أيضا مرجح النظمة المتزنة :

$\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$.

ملاحظات :

1 - إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فإن النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ ليس لها مرجح .

2 - إذا كان $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$ فإن مرجح النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ يسمى مركز ثقل المثلث ABC (في

حالة A و B و C نقط غير مستقيمة)

تمرين تطبيقي :

نعتبر النقط A و B و C و D بحيث : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

حدد α و β و γ بحيث تكون D هي مرجح النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$.

الحل : لدينا : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

بما أن : $7 + 3 - 4 \neq 0$ فإن D هي مرجح النقط المتزنة $(A; 7)$ و $(B; 3)$ و $(C; -4)$.

(أي أن : $\alpha = 7$ و $\beta = 3$ و $\gamma = -4$) .

(2) خاصيات :

أ - صمود المرجح :

خاصية :

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ فإنه لكل k من IR^* ، G هي كذلك مرجح النقط المتزنة

$(A; k\alpha)$ و $(B; k\beta)$ و $(C; k\gamma)$.

بتعبير آخر : مرجح ثلاث نقط متزنة لا يتغير إذا ضربنا أوزان هذه النقط في عدد حقيقي غير منعدم .

تمرين تطبيقي :

ليكن ABC مثلثا في المستوى .

أنشئ النقطة G مرجح النقط المتزنة $(A; 2007)$ و $(B; 2007)$ و $(C; -2007)$.

الحل :

G هي مرجح النقط المتزنة $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; -1)$.

$$\text{إذن : } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB}$$

إنشاء النقطة G : الرباعي AGBC متوازي أضلاع

ب - الخاصية المميزة للمرجح :

خاصية :

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ ثلاث نقط متزنة حيث : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. ولتكن G نقطة من المستوى . تكون G مرجح النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ إذا وفقط إذا كان : لكل نقطة M من المستوى :
 $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$.

ملاحظة :

إذا كان $M = A$ فإن : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$ هذه العلاقة تمكن من إنشاء النقطة G .

تمرين تطبيقي :

ليكن ABC مثلثا في المستوى والنقطة G مرجح النقط المتزنة $(A; 2)$ و $(B; 1)$ و $(C; 1)$.

(1) احسب المتجهة $\overrightarrow{MG}$ بدلالة $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ لكل نقطة M من المستوى .

(2) استنتج $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم $\overrightarrow{BG}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$.

(3) أنشئ النقطة G .

(4) حدد المجموعة (E) للنقط M بحيث : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 8$

ج - تجميعية المرجح :

أنشطة تمهيدية :

(1) ليكن ABC مثلثا في المستوى والنقطة G مرجح النقط المتزنة $(A; 2)$ و $(B; 1)$ و $(C; -1)$.

وليكن G_1 مرجح النقطتين المتزنتين $(A; 2)$ و $(B; 1)$.

بين أن النقطة G هي مرجح النقطتين المتزنتين $(G_1; 3)$ و $(C; -1)$.

(2) الحالة العامة : ليكن G مرجح النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ ؛ ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$)

أ - بين أن $\alpha + \beta \neq 0$ أو $\alpha + \gamma \neq 0$ أو $\beta + \gamma \neq 0$.

ب - نفترض أن : $\alpha + \beta \neq 0$. وليكن G_1 مرجح النقطتين المتزنتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$.

بين أن : G هي مرجح النقطتين المتزنتين $(G_1; \alpha + \beta)$ و $(C; \gamma)$.

خاصية :

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ ثلاث نقط متزنة حيث : $\alpha + \beta \neq 0$ و $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

إذا كان G هو مرجح النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \gamma)$ و G_1 هو مرجح النقطتين المتزنتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$

فإن : G هو مرجح النقطتين المتزنتين $(G_1; \alpha + \beta)$ و $(C; \gamma)$.

تمرين : (ينجز في دفتر التمارين)

نعتبر ABC مثلثا في المستوى ولتكن النقط I و J و K بحيث : I هي ممثلة B بالنسبة للنقطة C و $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ و K

هي ممثلة منتصف القطعة $[AB]$ بالنسبة للنقطة A .

بين أن المستقيمات (AI) و (BJ) و (CK) تتقاطع في نفس النقطة E ثم احسب $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{BE}$.

تمرين :

ABC مثلث في المستوى ولتكن النقط A' و B' و C' منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي .

لتكن G مرجح النقط المتزنة $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 1)$. (G هي مركز ثقل المثلث ABC)

(1) بين أن G هو مرجح النقطتين المتزنتين $(A'; 2)$ و $(A; 1)$ ثم احسب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AA'}$.

(2) بين أن المستقيمات (AA') و (BB') و (CC') تتقاطع في نقطة واحدة هي النقطة G .

III - مرجح أربع نقط متزنة :

* نعرف مرجح أربع نقط متزنة بنفس الطريقة التي عرفنا بها مرجح ثلاث نقط متزنة .

مثال :

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O . لدينا : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

وهذا تعني أن : O هي مرجح النقط المتزنة $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 1)$ و $(D; 1)$.

النقطة O تسمى أيضا مركز ثقل متوازي الأضلاع $ABCD$.

* خاصيات مرجح أربع نقط متزنة هي نفس خاصيات ثلاث نقط متزنة .

IV - إحداثيات المرجح :

نعتبر المستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. ولتكن $(A; a)$ و $(B; b)$ و $(C; c)$ و $(D; d)$ نقاطاً متزنة من المستوى .
(1) إحداثيات مرجح نقطتين متزنتين :

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b} \end{cases} : \text{ إذا كان } G \text{ هو مرجح النقطتين المتزنتين } (A; a) \text{ و } (B; b) \text{ فإن إحداثيتي } G \text{ في المعلم } (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ هما :}$$

مثال :

لتكن $A(2;3)$ و $B(-1;5)$. إحداثيات مرجح النقطتين المتزنتين $(A;4)$ و $(B;-3)$ هما :

(2) إحداثيات مرجح ثلاث نقط متزنة : (تنقل من الكتاب المدرسي ص 92)

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases} : \text{ إذا كان } G \text{ هو مرجح النقط المتزنة } (A; a) \text{ و } (B; b) \text{ و } (C; c) \text{ فإن إحداثيتي } G \text{ هما :}$$

مثال

(3) إحداثيات مرجح أربع نقط متزنة :

إذا كان G هو مرجح النقط المتزنة $(A; a)$ و $(B; b)$ و $(C; c)$ و $(D; d)$ فإن إحداثيتي G هما :

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases}$$

مثال :

التمرين 3 :

ABC مثلث في المستوى .

(1) أنشئ النقطة D مرجح النظمة المتزنة $\{(B;2);(C;-3)\}$.

(2) أنشئ النقطة E مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(C;-3)\}$.

(3) أنشئ F مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(B;2)\}$.

(4) بين أن (AD) و (BE) و (CF) مستقيمات متوازية .

(5) أ - نعتبر G مرجح النقط المتزنة : $(A;3)$ و $(B;-1)$ و $(C;2)$. حدد زوج إحداثيتي G في المعلم

$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

ب - حدد طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 8AB$