

1. الحدودية : كتابة ومصطلحات

1-1. أنشطة

نشاط 1: لتكن الأعداد x و $x+1$ و $x+3$ أبعاد متوازي المستطيلات حيث $x \in IR$ و $V(x)$ حجمه. حدد طبيعة التعبير $V(x)$.

نشاط 2: حدد من بين التعابير التالية تلك التي تمثل حدوديات و حدد درجتها:

$$P(x) = x^2 - \sqrt{7}x + 3 \quad ; \quad Q(x) = 4x^6 - 5x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 1 \quad ; \quad H(x) = 5 \quad ; \quad R(x) = 0 \quad ; \quad N(x) = 3x^3 + 4x^{-2} + 2|x|$$

نشاط 3: اختصر الحدودية التالية: $P(x) = -2x^5 + 3x^3 + 1 - 4x^4 + x^3 + x + x^2 - x^4 - 5$

2-1. مصطلحات وتعريف

- كل تعبير على شكل ax^n يسمى **حد** حيث $a \in IR$ و $n \in IN$ و x متغير حقيقي. إذا كان $a \neq 0$ فإن n يسمى **درجة الحد** ax^n و a معامل.

- الحدودية هي كل تعبير مكون من مجموع حدود. $(P(x) = 4x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 7)$

- الحدودية المنعدمة هي حدودية جميع معاملاتها منعدمة.

- درجة حدودية غير منعدمة $P(x)$ هي درجة حدها الذي له أكبر درجة و يرمز لها بـ $d^0 P(x)$.

- اختصار حدودية هو كتابتها على شكل مجموع حدود درجاتها مختلفة مثنى مثنى و مرتبة تنازليا.

- تكون حدوديتان مختصرتان وغير منعدمتين، متساويتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملاتها متساوية.

- كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى **حدّانية** و تكتب على الشكل $ax + b$ حيث $a \in IR^*$ و $b \in IR$.

- كل حدودية من الدرجة الثانية تسمى **ثلاثية الحدود** و تكتب $ax^2 + bx + c$ حيث $a \in IR^*$ و $b \in IR$ و $c \in IR$.

التمرين 1 نعتبر الحدوديتان:

$$Q(x) = x^3 + 4x^2 + 3x \quad \text{و} \quad P(x) = ax^3 + (b-c)x^2 + (a-c+1)x$$

أ) حدد a و b و c لكي تكون $P(x)$ حدودية منعدمة.

ب) حدد a و b و c لكي تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين.

2. مجموع وجداء حدوديتين

نشاط: 1- نعتبر الحدوديتين $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ و $Q(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x - 3$

احسب $P(x) + Q(x)$ و $P(x) - Q(x)$

2- نعتبر الحدوديتين $P(x) = 3x^2 + 5x - 1$ و $Q(x) = x^3 - x^2 - 3$

احسب $P(x) \times Q(x)$

خاصية

- مجموع حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P + Q$ حيث

$$d^o(P + Q) \leq \sup(d^o(P); d^o(Q))$$

- فرق حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P - Q$ حيث

$$d^o(P - Q) \leq \sup(d^o(P); d^o(Q))$$

- جداء حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P \times Q$ حيث

$$d^o(P \times Q) = d^o(P) + d^o(Q)$$

3. جذر حدودية - القسمة على $x - \alpha$

3-1 جذر حدودية

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.

نقول إن العدد α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان $P(\alpha) = 0$.

مثال

نعتبر الحدودية $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

حدد من بين الأعداد التالية 1 و -1 و 2 و -3 تلك التي تمثل جذراً لـ $P(x)$.

3-2 القسمة على $x - \alpha$

خاصية

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 2$ و α عددا حقيقيا.

توجد حدودية وحيدة $Q(x)$ درجتها $n - 1$ حيث $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$

$Q(x)$ تسمى خارج القسمة الأقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$

$P(\alpha)$ يسمى باقي القسمة الأقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$

أ) تقنية لحساب الخارج والباقي

مثال 1

نعتبر الحدودية $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$

احسب $P(3)$ ثم حدد خارج وباقي القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x - 3$.

مثال 2

نعتبر الحدودية $P(x) = x^5 - 2x^2 + 3x - 2$

احسب $P(1)$ ثم حدد خارج وباقي القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x-1$.

(ب) قابلية القسمة على $x-\alpha$

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.

نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$ حيث

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x).$$

نتيجة

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.

نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وفقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

التمرين 2 نعتبر الحدودية $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

(1) تأكد أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$.

(2) بإيجاز القسمة الاقليدية حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x) = (x-3)Q(x)$.

(3) بين أن -1 جذرا للحدودية $Q(x)$.

(4) عمل الحدودية $P(x)$ إلى جداء ثلاث حدانيات.

التمرين 3 نعتبر الحدودية $P(x) = 2x^3 + mx^2 - 11x - 6$

(1) حدد m لكي تقبل $P(x)$ القسمة على $x-2$.

(2) نضع $m=3$ أحسب $P(-3)$.

استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.