

الحساب المتجهي

I تساوي متجهتين - مجموع متجهتين

تذكير: منظم المتجه $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ هو المسافة AB ، نكتب $\|\vec{u}\| = AB$

1 تساوي متجهتين

تعريف

تكون متجهتان متساويتين إذا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم.

تعريف (المتجهة المنعدمة)

المتجهة المنعدمة هي المتجهة التي منظمها منعدم ويرمز لها بالرمز $\vec{0}$ بحيث:

لكل نقطة M من المستوى $\vec{0} = \overrightarrow{MM}$

خاصية

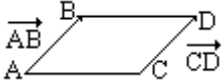
لتكن A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية في المستوى، لدينا:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع.

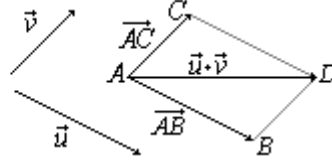
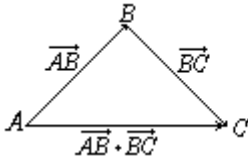
نتيجة

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يكافئ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$



2 مجموع متجهتين - علاقة شال



$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان و A نقطة من المستوى.

توجد نقطة وحيدة B حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ وتوجد نقطة وحيدة C حيث $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (أي مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$) هو المتجهة $\overrightarrow{AD}$ حيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من المستوى: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

مهما تكن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \quad ; \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad ; \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

(3) مقابلة متجهة - فرق متجهتين

(أ) مقابلة متجهة

تعريف

- لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة. مقابلة المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس اتجاه ونفس منظم المتجهة $\vec{u}$ ومنحاهها معاكس لمنحى $\vec{u}$ ويرمز لها بالرمز $-\vec{u}$. ولدينا: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ لكل متجهة $\vec{u}$.
- مقابلة المتجهة $\vec{AB}$ هي المتجهة $\vec{BA}$.

(ب) فرق متجهتين

تعريف

$$\text{لكل متجهتين } \vec{u} \text{ و } \vec{v} : \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

خاصية

$$\text{لكل ثلاث نقط } O \text{ و } A \text{ و } B \text{ من المستوى : } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

(علاقة تستعمل في مادة الفيزياء لدراسة حركة الأجسام)

II ضرب متجهة في عدد حقيقي

نشاط: ليكن ABC مثلثا، نضع $\vec{u} = \vec{AB}$ و $\vec{v} = \vec{AC}$

أنشئ $3\vec{u}$ و $-2\vec{v}$ ثم $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

تعريف

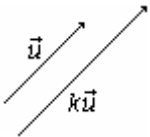
$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم.

جاء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث:

- $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه

- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

- منحى $k\vec{u}$ هو منحى $\vec{u}$ إذا كان $k > 0$ وهو عكس منحى $\vec{u}$ إذا كان $k < 0$.



مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ومهما يكن العددين الحقيقيان α و β فإن:

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \quad ; \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

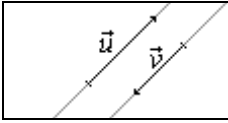
$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u}) \quad ; \quad 1.\vec{u} = \vec{u}$$

$$\alpha\vec{u} = \vec{0} \text{ يكافئ } (\alpha = 0 \text{ أو } \vec{u} = \vec{0})$$

III) الاستقامية

1) استقامية متجهتين

تعريف



تكون متجهتان مستقيمتين إذا كان لهما نفس الاتجاه.

خاصية

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين إذا وفقط إذا كانت إحداها جداء الأخرى في عدد حقيقي α ($\vec{v} = \alpha\vec{u}$)
(العدد α يسمى معامل استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$)

ملاحظة المتجهة المنعدمة مستقيمة مع كل متجهة $\vec{u}$ في المستوى لأن $\vec{0} = 0.\vec{u}$.

التمرين 1: لتكن A و B و C و M أربع نقط في المستوى و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين حيث:

$$\vec{v} = 2\vec{BA} - 6\vec{BC} \quad ; \quad \vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$$

$$1. \text{ بين أن } \vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$$

$$2. \text{ استنتج أن } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان.}$$

2) استقامية ثلاث نقط

خاصية وتعريف

لنكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى حيث $A \neq B$.

تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي x حيث $\vec{AC} = x\vec{AB}$.

العدد الحقيقي x يسمى أفصول النقطة C في المثلث $(A; B)$.

أمثلة: $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$ يعني أن -3 أفصول النقطة E في المعلوم $(A; B)$.

$\overrightarrow{CF} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{CA}$ يعني أن $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ أفصول النقطة F في المعلوم $(C; A)$.

التمرين 2: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و P و Q نقطتين حيث $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AD}$.

(1) أنشئ الشكل.

(2) أ- عبر عن $\overrightarrow{CP}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

ب- عبر عن $\overrightarrow{CQ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

(3) استنتج أن النقط P و Q و C مستقيمية.

3) منتصف قطعة

خاصية

تكون النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

ملاحظة $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ يكافئ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

التمرين 3: ليكن ABC مثلثا و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. أنشئ الشكل

2. أثبت أن B منتصف القطعة $[EF]$.

4) توازي مستقيمين

خاصية

لكن A و B و C و D نقطا في المستوى حيث $A \neq B$ و $C \neq D$.

يكون $(AB) \parallel (CD)$ إذا وفقط إذا كانت المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيمتين.

التمرين 4: ليكن ABC مثلثا و I و J نقطتين حيث $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

(1) عبر عن $\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

(2) استنتج أن $(IC) \parallel (BJ)$.