
EL JOHRA MOHAMED

الإشتقاق

ثانوية ابن طفيل التأهيلية بأولاد يعيش بني ملال

الجزءة محمد

EL JOHRA MOHAMED

08/04/2012

4.....	الحصة 1
4.....	I. الاشتقاق في نقطة x_0
4.....	1. تعريف
4.....	2. ملاحظة
4.....	3. التأويل الهندسي
4.....	4. نشاط geogebra
4.....	5. الحل
6.....	6. معادلة المماس لمنحنى دالة
7.....	7. خاصية الاتصال و الإشتقاق
7.....	8. ملاحظة
8.....	الحصة رقم 2
8.....	9. التقريب المحلي لدالة قابلة للإشتقاق بدالة تألفية
8.....	10. تمرين
8.....	11. الحل
9.....	الحصة رقم 3
9.....	II. الاشتقاق على اليمين – الاشتقاق على اليسار
9.....	1. تعريف
9.....	2. التأويل الهندسي
9.....	a. نصف مماس
10.....	b. نقطة مزواة point anguleu
10.....	c. نصف مماس مواز لمحور الأرتاب
11.....	3. خاصية : اشتقاق دالة في نقطة
11.....	4. خاصية : الإشتقاق و الإتصال
11.....	5. تمرين
11.....	6. الحل
13.....	الحصة رقم 4
13.....	III. العمليات على الدوال المشتقة
13.....	1. تعريف : الإشتقاق على مجال-الدالة المشتقة
13.....	2. تذكير ببعض العمليات على الدوال المشتقة
13.....	3. تمرين تطبيقي
13.....	4. الحل
14.....	5. تمرين حساب نهاية باستعمال الدالة المشتقة
14.....	6. الحل
15.....	7. المشتقات المتتالية

15.....	تمرين (فرض منزلي)	8.
16.....	الحصة رقم 5	
16.....	مشتقة دالة مركبة	.IV
16.....	خاصية	.1
16.....	مثال	.2
16.....	تطبيقات مهمة	.3
16.....	تمرين	.4
16.....	الحل	.5
18.....	الحصة رقم 6	
18.....	مشتقة الدالة العكسية	.V
18.....	خاصية	.1
18.....	تمرين تطبيقي	.2
18.....	الحل	.3
19.....	الحصة رقم 7	
19.....	مشتقة دالة الجذر من الرتبة n	.VI
19.....	خاصية 1	.1
19.....	أمثلة تطبيقية	.2
19.....	خاصية 2	.3
19.....	تطبيقات مهمة	.4
19.....	تمرين تطبيقي	.5
19.....	الحل	.6

الإشتقاق

الحصة رقم 1

I. الإشتقاق في نقطة x_0

1. تعريف

تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا و فقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$

و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 .

2. ملاحظة

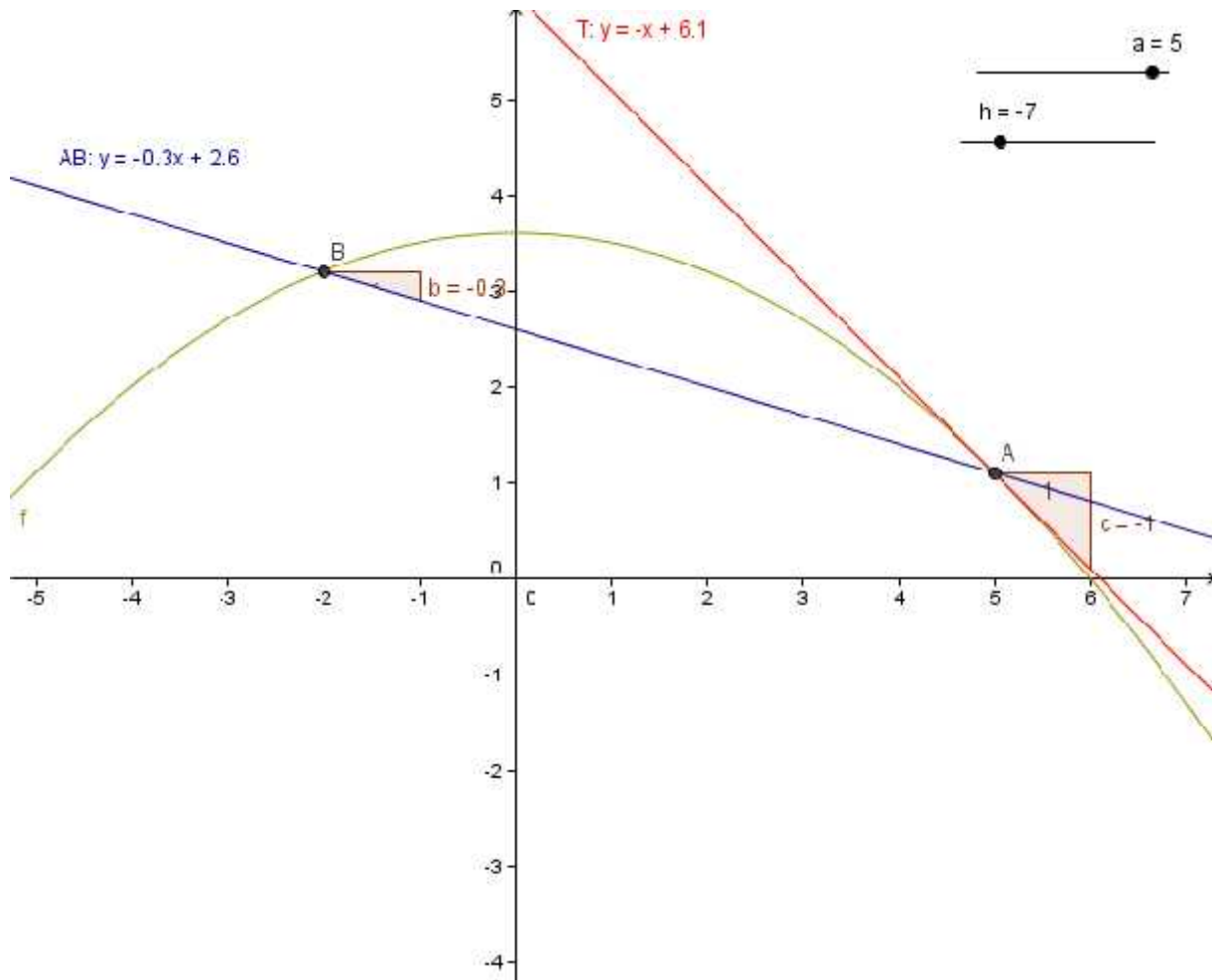
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3. التأويل الهندسي

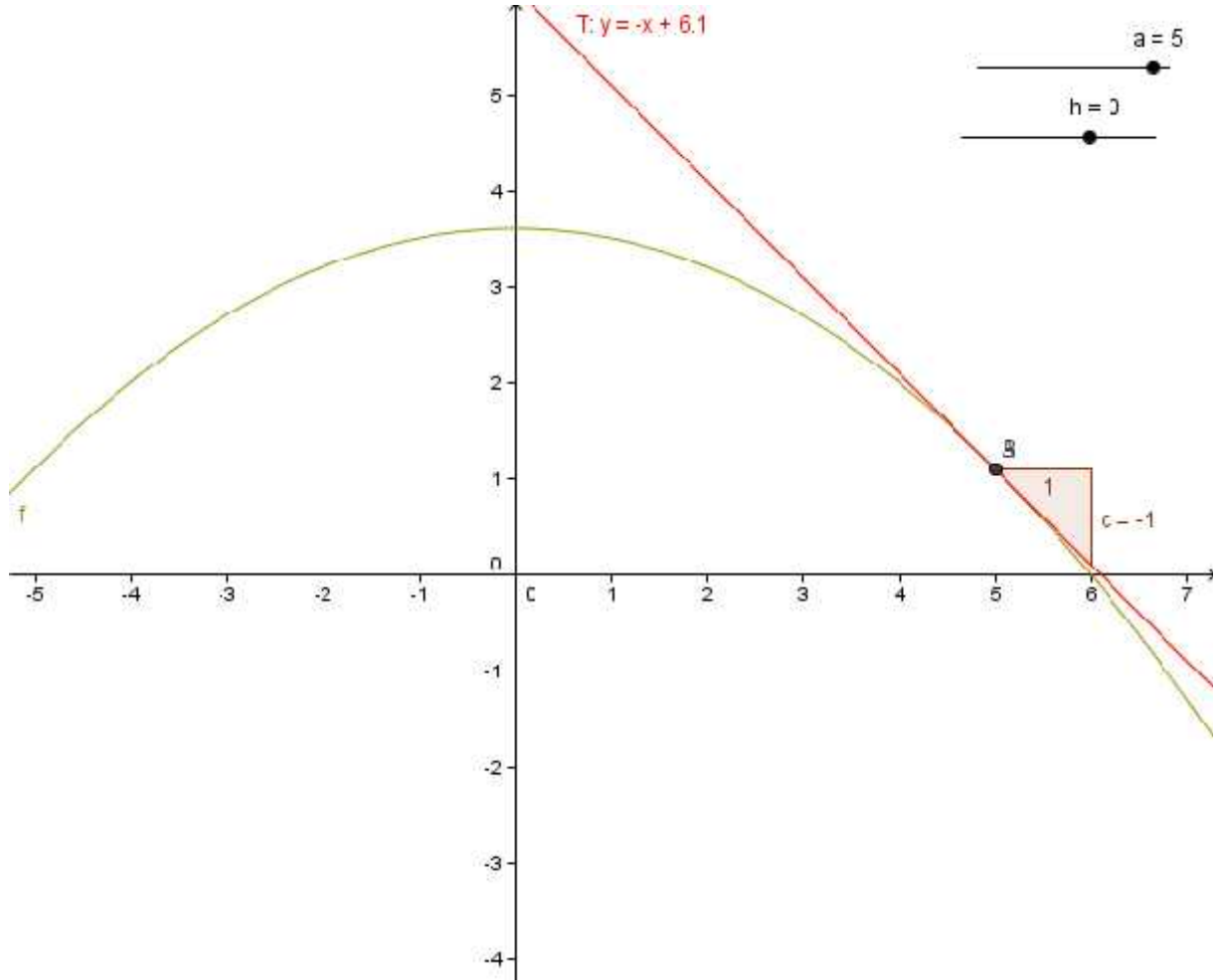
a. نشاط geogebra

1. أنشئ في معلم متعامد المنحنى الممثل للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = -0,1x^2 + 3,6$
2. أنشئ a curseur يتغير من -6 إلى 6 بخطوات متقايصة إلى 0,1
3. ضع أولا $a = 5$
4. أنشئ النقطة $A(a, f(a))$
5. أنشئ المستقيم (T) المماس للمنحنى (Cf) في النقطة A
6. حدد و أظهر (على الشكل) ميل المستقيم (T)
7. أنشئ h curseur يتغير من -10 إلى 5 بخطوات متقايصة إلى 0,01
8. ضع $h = -7$
9. أنشئ النقطة $B(a+h, f(a+h))$
10. أنشئ المستقيم (AB)
11. حدد و أظهر (على الشكل) ميل المستقيم (AB)
12. إجعل h يؤول إلى 0 ماذا تلاحظ
13. استنتج التأويل الهندسي للعدد المشتق للدالة f عند $x_0 = a$

b. الحل



الشكل بعدما آل h إلى الصفر

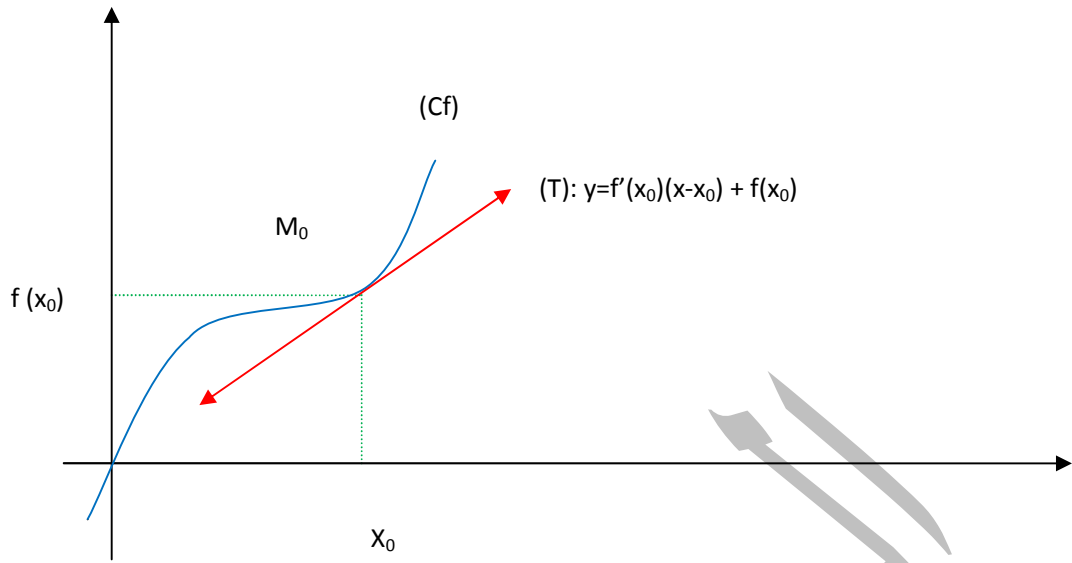


جرب بنفسك

4. معادلة المماس لمنحنى دالة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 فإن (Cf) يقبل في النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ مماسا (T) ميله $f'(x_0)$

و معادلته الديكارتية هي : $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



5. خاصية الاتصال و الإشتقاق

كل دالة قابلة للإشتقاق في نقطة a تكون متصلة في a

6. ملاحظة

عكس هذه الخاصية غير صحيح فمثلا الدالة $f: x \rightarrow |x|$ متصلة و غير قابلة للإشتقاق في الصفر

تأكد من ذلك

الحصة رقم 2

7. التقريب المحلي لدالة قابلة للإشتقاق بدالة تآلفية
خاصية و تعريف

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في نقطة a

الدالة التآلفية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ تسمى الدالة التآلفية المماسية للدالة f عند a .

8. تمرين

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt{1+x}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $a = 0$
2. أول النتيجة المحصل عليها
3. حدد تقريبا للدالة f بدالة تآلفية بجوار $a=0$
4. استنتج قيما مقربة لكل من العددين : $\sqrt{1.002}$ و $\sqrt{0.996}$

9. الحل

1. دراسة اشتقاق الدالة f عند $a = 0$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق في الصفر و لدينا : $f'(0) = \frac{1}{2}$

2. التأويل الهندسي : بما أن f دالة قابلة للاشتقاق في الصفر فإن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $A(0; f(0))$

$(T): y = \frac{1}{2}x + 1$ و معادلته : $f'(0) = \frac{1}{2}$ و معادلته

3. الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و منه : f تقبل دالة تآلفية مماسة لها عند الصفر و هي $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

أي بجوار الصفر لدينا : $\sqrt{x+1} \approx \frac{1}{2}x + 1$

4. لدينا بجوار الصفر $\sqrt{x+1} \approx \frac{1}{2}x + 1$

و منه $\sqrt{1+0.002} \approx 1.001$ أي $\sqrt{1.002} = \sqrt{1+0.002} \approx \frac{0.002}{2} + 1$

و كذلك : $\sqrt{0.996} \approx 0.998$ أي $\sqrt{0.996} = \sqrt{1-0.004} \approx -\frac{0.004}{2} + 1$

الحصة رقم 3

.II الاشتقاق على اليمين – الاشتقاق على اليسار

1. تعريف

تكون f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا و فقط إذا كان $\mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$

و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$

تكون f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا و فقط إذا كان $\mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$

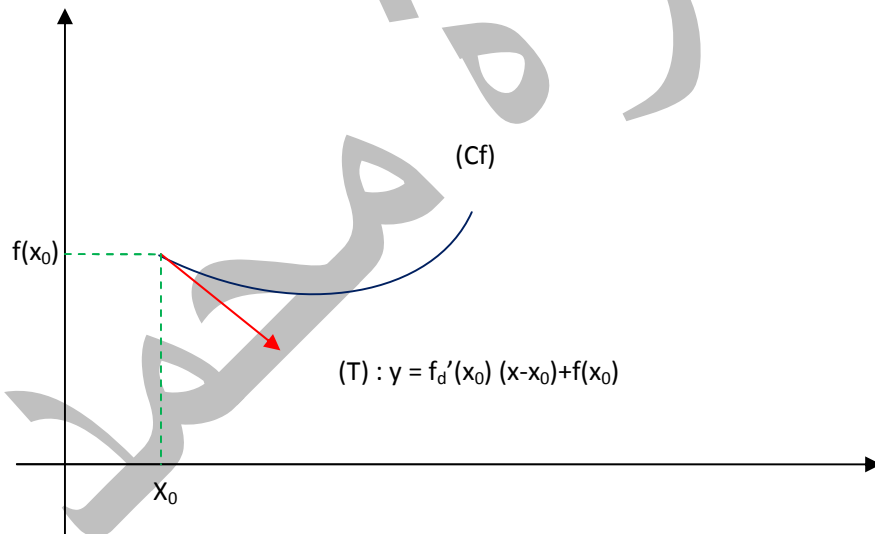
و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$

2. التأويل الهندسي

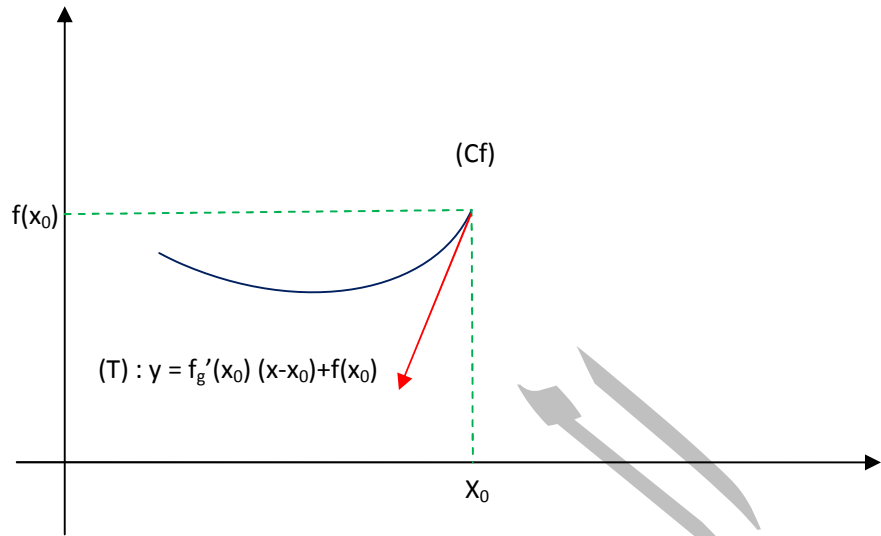
a. نصف مماس

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين (أو على اليسار) في x_0 فإن (Cf) يقبل في النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ نصف مماس على اليمين (أو على اليسار) (T) معادلته الديكارتية هي :

الشكل 1

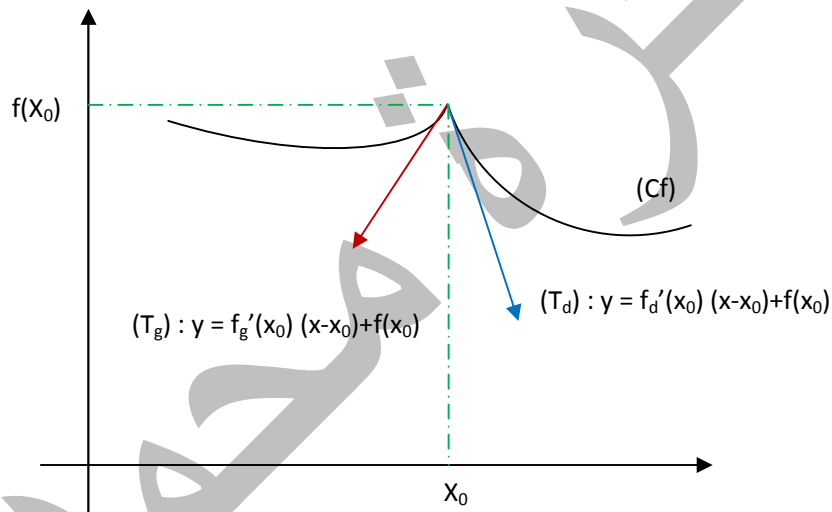


الشكل 2



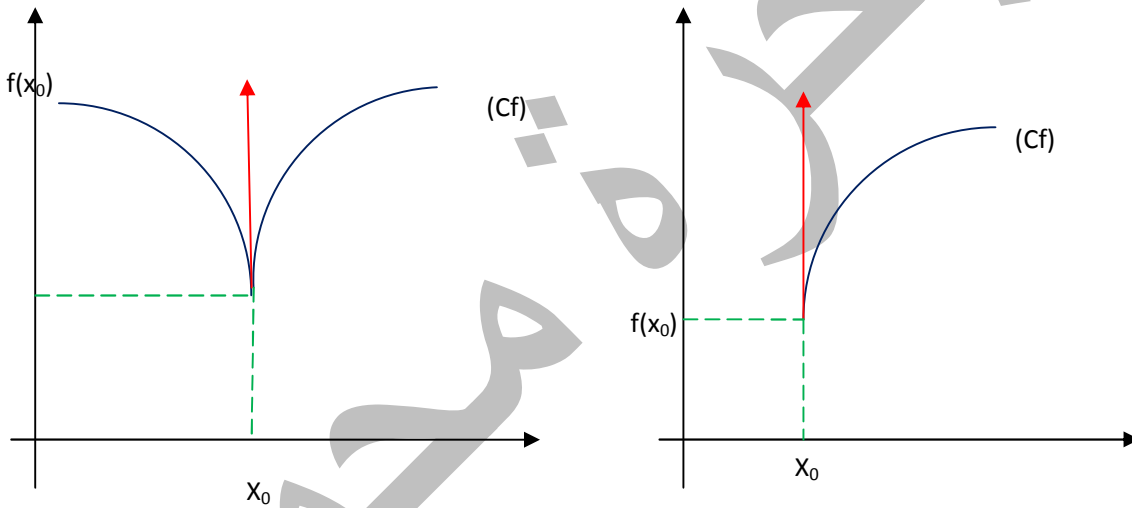
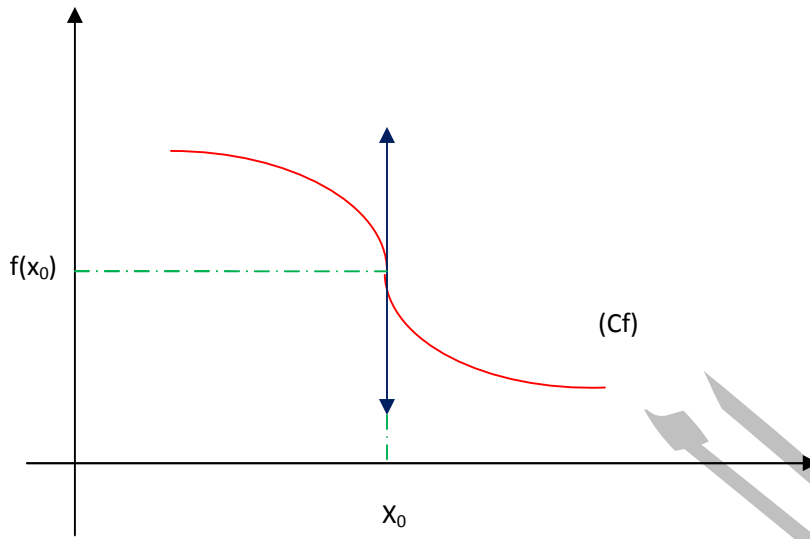
b. نقطة مزواة point anguleu

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 و قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 لكن f غير قابلة للاشتقاق في x_0 أي $(f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0))$ فإن (Cf) يقبل نقطة مزواة عند $M_0(x_0; f(x_0))$ أنظر الشكل



c. نصف مماس مواز لمحور الأرتايب

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$ فإن (Cf) يقبل في $M_0(x_0; f(x_0))$ نصف مماس مواز لمحور الأرتايب أنظر الشكل



3. خاصية : اشتقاق دالة في نقطة

لدينا f قابلة للاشتقاق في $x_0 \Leftrightarrow f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$

4. خاصية : الإشتقاق و الإتصال

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن f متصلة في x_0 (العكس غير صحيح)

5. تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} ; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{4} , x \geq 1 \end{cases}$$

1. تحقق أن الدالة f متصلة في 1
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 1
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ثم أول النتيجة هندسيا

6. الحل

a. دراسة اتصال الدالة f عند 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt{x-1} = 0 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x-1}{4} = 0 \text{ و}$$

$$f(1)=0 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{ : ومنه}$$

إذن f دالة متصلة في النقطة 1

b. دراسة اشتقاق الدالة f في النقطة 1

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 1}{4(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+1}{4} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ : على اليمين}$$

ومنه f قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 و $f'_d(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ : على اليسار}$$

ومنه f قابلة للإشتقاق على اليسار في 1 و $f'_g(1) = \frac{1}{2}$

بما أن $f'_d(1) = f'_g(1)$ فإن f قابلة للإشتقاق في النقطة 1

c. دراسة اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر

التأويل الهندسي : بما أن $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ فإن المنحنى (Cf) يقبل نصف مماس في النقطة

$A(0;1)$ مواز لمحور الأرتيب و موجه نحو الأعلى

الحصة رقم 4

III. العمليات على الدوال المشتقة

1. تعريف : الإشتقاق على مجال-الدالة المشتقة

f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح $I \Leftrightarrow f$ قابلة للإشتقاق في كل نقطة x_0 من المجال I

تكون f قابلة للإشتقاق على مجال مغلق $[a; b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح $]a; b[$ و قابلة للإشتقاق على اليمين في a و قابلة للإشتقاق على اليسار في b

الدالة المشتقة (إن وجدت) معرفة كالتالي :
 $f' : I \rightarrow IR$
 $x \rightarrow f'(x)$

2. تذكير ببعض العمليات على الدوال المشتقة

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

3. تمرين تطبيقي

حدد الدالة المشتقة للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية

$$I =]0; +\infty[; f(x) = x\sqrt{x} \quad .a$$

$$I = IR ; f(x) = \frac{1}{2+\sin x} \quad .b$$

4. الحل

f جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0; +\infty[$ وهما : $x \rightarrow x$ و $x \rightarrow \sqrt{x}$

ومنه f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا :

$$f'(x) = (x\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

الدالة $x \rightarrow 2 + \sin x$ قابلة للإشتقاق على IR (لأن لكل x من IR لدينا $2 + \sin x \neq 0$)

$$f'(x) = \frac{-(2 + \sin x)'}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-\cos x}{(2 + \sin x)^2} \text{ و منه الدالة } f \text{ قابلة للإشتقاق على IR و لدينا :}$$

5. تمرين حساب نهاية باستعمال الدالة المشتقة

باستعمال الإشتقاق، أحسب النهايتين التاليتين :

$$a. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

6. الحل

$$a. \text{ نضع } f(x) = 2 \sin x$$

$f'(x) = 2 \cos(x)$ و لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على IR

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \text{ و منه}$$

$$b. \text{ نضع } g(x) = \sqrt{x+4}$$

g دالة قابلة للإشتقاق على $]-4; +\infty[$ و لدينا $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+4}} = \frac{1}{4} \text{ و منه :}$$

7. المشتقات المتتالية

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال .

إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على I فدالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f وتكتب f'' أو $f^{(2)}$

الدوال $f^{(2)} = (f')'$ و $f^{(3)} = (f^{(2)})'$ و ... و $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ إن وجدت تسمى المشتقات المتتالية للدالة f

الدالة $f^{(n)}$ تسمى المشتقة من الرتبة n للدالة f

8. تمرين (فرض منزلي)

بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}); \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

الحصة رقم 5

IV. مشتقة دالة مركبة

1. خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\square x \square I) ; (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

2. مثال

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = \sin(x^3 - 3x)$

لنحدد الدالة المشتقة للدالة h

نضع لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3 - 3x$ و $g(x) = \sin(x)$

لدينا $h = g \circ f$ و الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا : لكل x من $\mathbb{R}$: $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = (3x^2 - 3) \cos(x^3 - 3x)$

3. تطبيقات مهمة

$$(\sin(u(x)))' = \cos(u(x)) u'(x)$$

$$(\cos(u(x)))' = -\sin(u(x)) u'(x)$$

$$(\tan(u(x)))' = (1 + \tan^2(u(x))) u'(x)$$

4. تمرين

حدد الدالة المشتقة للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = (x^2 + 3x + 1)^4 \quad .a$$

$$I =]1, +\infty[; f(x) = \frac{1}{(x^3 - 1)^2} \quad .b$$

$$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[; f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) \quad .c$$

5. الحل

a. نضع لكل x من $\mathbb{R}$: $u(x) = x^2 + 3x + 1$, u دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه الدالة $f : x \rightarrow$

$(u(x))^4$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

و لدينا : $f' = 4 u' u^3$ أي لكل x من $\mathbb{R}$ $f'(x) = 4(2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^3$

b. نضع لكل x من $]1, +\infty[$: $v(x) = (x^3 - 1)$ ومنه $f(x) = (v(x))^{-2}$

الدالة v قابلة للاشتقاق و لا تنعدم على المجال I و منه f قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $f'(x) =$

$$(v^{-2}(x))' = -2v'(x)v^{-3}(x) = \frac{-6x^2}{(x^3-1)^3}$$

c. نضع $w: x \rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}$ و هي دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على المجال $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

و لدينا : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < w(x) < \frac{\pi}{2}$ و بما أن الدالة $\tan$ قابلة للاشتقاق على المجال

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

فإن الدالة $f = \tan \circ w$ قابلة للاشتقاق على المجال I و لدينا :

$$(x \in I) ; f'(x) = \tan'(w(x)) \times w'(x) = [1 + \tan^2(w(x))] \times \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} [1 + \tan^2(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})] \quad \text{أي :}$$

الحصة رقم 6

V. مشتقة الدالة العكسية

1. خاصية

لتكن f تقابل من I نحو J

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث f' لا تنعدم على I فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ و لدينا

$$(\forall \alpha \in J) ; (f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\alpha))}$$

2. تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; \frac{1}{4}]$ بما يلي : $f(x) = (1 - 2\sqrt{x})^3$

1. بين أن f تقبل دالة عكسية

2. أ حسب $f(\frac{1}{16})$

3. استنتج $f'(\frac{1}{8})$

3. الحل

الدالة f متصلة على $]0; \frac{1}{4}]$ لأنها مركب دالتين متصلتين ,

الدالة $u : x \rightarrow 1 - 2\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0; \frac{1}{4}]$ و لدينا : $u'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$

ومنه : $(\forall x \in]0; \frac{1}{4}]) ; f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{x}} (1 - 2\sqrt{x})^2$

إذن $f'(x) < 0$ لكل x من $]0; \frac{1}{4}]$

إذن الدالة f تناقصية قطعاً على $]0; \frac{1}{4}]$

نستنتج أن f تقبل دالة عكسية معرفة على المجال J حيث : $J = f(]0; \frac{1}{4}]) =]0; 1[$

لدينا $f(\frac{1}{16}) = \frac{1}{8}$ إذن $f^{-1}(\frac{1}{8}) = \frac{1}{16}$

و بما أن $f'(\frac{1}{16}) = -\frac{1}{3}$ فإن : $(f^{-1})'(\frac{1}{8}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{16})} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$

الحصة رقم 7

.VI مشتقة دالة الجذر من الرتبة n

1. خاصية 1

$$\sqrt[n]{x} = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

2. أمثلة تطبيقية

الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

الدالة $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا : $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

الدالة $x \rightarrow \sqrt[4]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا : $(\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

3. خاصية 2

ليكن n عددا صحيحا طبعيا غير منعدم .

إذا كانت f دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا

4. تطبيقات مهمة

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \times x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\text{أو } (x^r)' = r \times x^{r-1} \quad (r \in \mathbb{Q})$$

$$(f^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \times f^{\frac{p}{q}-1} \times f'$$

5. تمرين تطبيقي

حدد الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية :

$$f_1: x \rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 \quad \text{i.}$$

$$f_2: x \rightarrow \sqrt[3]{x^4} \quad \text{ii.}$$

$$f_3: x \rightarrow \sqrt[4]{1+\cos^2 x} \quad \text{iii.}$$

6. الحل

i. تحديد مشتقة الدالة f_1

الدالة $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ والدالة $x \rightarrow x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومنه الدالة $f_1 = v \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا : $f_1'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

ii. تحديد مشتقة الدالة f_2

الدالة $x^4 \rightarrow w \square x$ موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ إذن الدالة f_2 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا

$$f'_2(x) = \frac{1}{3}(w(x))^{\frac{1}{3}-1}w'(x) = \frac{1}{3}(x^4)^{\frac{1}{3}-1} \times 4x^3 = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

iii. تحديد مشتقة الدالة f_3

الدالة $x \rightarrow 1 + \cos^2 x$ موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن الدالة « f » قابلة للاشتقاق في كل نقطة x من $\mathbb{R}$

و لدينا :

$$f'_3(x) = \frac{1}{4}(1 + \cos^2 x)'(1 + \cos^2 x)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}(-2\sin x \cos x) \frac{1}{\sqrt[4]{(1 + \cos^2)^3}} = \frac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1 + \cos^2)^3}}$$