

المادة: الرياضيات

درس رقم / 13

الأستاذ: نجيب عثمانى

ملخص لدرس الجداء المتجهي

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

I. توجيه الفضاء-ثلاثي الأوجه-المعلم و الأساس الموجهان:

ثلاثي الأوجه:

تعريف:

ثلاثة أنصاف مستقيمات في الفضاء لها نفس الأصل O و غير مستوائية تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه, نرمز له بالرمز $(Ox; Oy; Oz)$.

$[Ox]$ و $[Oy]$ و $[Oz]$ تسمى أحرف ثلاثي الأوجه $(Ox; Oy; Oz)$.

توجيه الفضاء:

ليكن $(Ox; Oy; Oz)$ ثلاثي أوجه: رجل أمبير لثلاثي الأوجه $(Ox; Oy; Oz)$, هو شخص خيالي محمول على الحرف $[Oz]$, قدماء في النقطة O , و ينظر إلى الحرف $[Ox]$, بالنسبة لرجل أمبير هناك وضعيتان للحرف $[Oy]$.

الحرف $[Oy]$ عن يساره (الوضعية (1)) الحرف $[Oy]$ عن يمينه (الوضعية (2))

اصطلاحيا, نقول إن الثلاثي الأوجه $(Ox; Oy; Oz)$ مباشر (أو موجب) إذا كان رجل أمبير محمولا على $[Oz]$ و قدماء في النقطة O و ينظر إلى الحرف $[Ox]$ و يكون الحرف $[Oy]$ عن يساره. (الوضعية (1))

الأساس و المعلم الموجهان:

تعريف:

ليكن $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلما في الفضاء. نضع $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

نقول إن الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشر إذا كان ثلاثي الأوجه $(OI; OJ; OK)$ مباشرا.

نقول إن المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشر إذا كان الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشرا.

نقول إن الفضاء موجه توجيها مباشرا (أو موجبا) إذا كان منسوبيا لمعلم مباشر.

فيما تبقى من فقرات الدرس, نعتبر أن الفضاء موجه توجيها مباشرا

II. تعريف هندسي للجداء المتجهي و تأويل منظمه:

تعريف هندسي للجداء المتجهي:

تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في الفضاء الموجه الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب, هو المتجهة التي نرمز لها بالرمز $\vec{u} \wedge \vec{v}$ و المعرفة بما يلي:

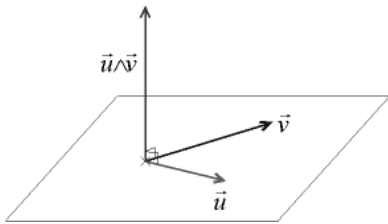
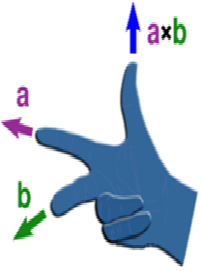
إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين فان: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ بحيث:

$$\vec{w} \perp \vec{u} \text{ و } \vec{w} \perp \vec{v}$$

$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ أساس مباشر,

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta \text{ حيث } \theta \text{ قياس للزاوية الهندسية } BAC \text{ مع } \vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ و } \vec{v} = \overrightarrow{AC}.$$



مثال 1

ليكن $(Ox; Oy; Oz)$ ثلاثي أوجه مباشر.

باستعمال قاعدة رجل أمبير, حدد من بين ثلاثيات الأوجه التالية المباشرة و غير المباشرة.

$$(Ox; Oz; Oy) \quad (Oy; Oz; Ox)$$

$$(Oz; Ox; Oy) \quad (Oy; Ox; Oz)$$

مثال 1

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ حيث $AB = 1$

$$1. \text{ بين أن: } \vec{AB} \wedge \vec{DC} = \vec{0}$$

$$2. \text{ بين أن: } \vec{AB} \wedge \vec{AD} = \vec{AE}$$

$$3. \text{ حدد النقطة } D'$$

$$\text{بحيث: } \vec{AB} \wedge \vec{AE} = \vec{AD'}$$

تمرين:

$$\text{أحسب } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \text{ إذا علمت أن: } \left(\vec{u}; \vec{v} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ و } \|\vec{u}\| = 1 \text{ و } \|\vec{v}\| = 3$$

$$\text{أحسب } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \text{ إذا علمت أن: } \|\vec{u}\| = 2 \text{ و } \|\vec{v}\| = 3 \text{ و } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{2}$$

نتائج

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ لدينا:}$$

لكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء غير مستقيمتين.

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين فان $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس متعامد مباشر.

$$\text{يكون } (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ أساسا متعامدا ممنظما مباشرا إذا كانت: } \vec{u} \perp \vec{v} \text{ و } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \text{ و } \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

III. تأويل منظم الجداء المتجهي لمتجهتين:

خاصية: مساحة مثلث-مساحة متوازي الأضلاع:

$$\square \text{ ليكن } ABC \text{ مثلثا. مساحة المثلث } ABC \text{ هي: } \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

$$\square \text{ ليكن } ABCD \text{ متوازي أضلاع. مساحة } ABCD \text{ هي: } \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

التألفية-الخطانية:

خاصية 1:

لكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا, لدينا:

$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

IV. استقامية متجهتين:

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين مستقيمتين في الفضاء إذا وفقط إذا كان: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

إحداثيات الجداء المتجهي بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر:

خاصية:

الفضاء منسوب إلى أساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

لكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, إحداثياتهما $(x; y; z)$ و $(x'; y'; z')$ على التوالي.

$$(X; Y; Z) \text{ متلوث إحداثيات الجداء المتجهي } \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ بحيث: } X = \begin{vmatrix} yy' \\ zz' \end{vmatrix} \text{ و } Y = \begin{vmatrix} xx' \\ zz' \end{vmatrix} \text{ و } Z = \begin{vmatrix} xx' \\ yy' \end{vmatrix}$$

$$\text{مثال} \text{ ليكن } ABCDEFGH \text{ مكعبا و } M \text{ و } N \text{ النقطتين المعرفتين بما يلي: } \vec{AN} = -\frac{1}{2} \vec{AB} \text{ و } \vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{1}{3} \vec{AE}$$

بين أن النقط M و N و G مستقيمية

V. مسافة نقطة عن مستقيم:

خاصية:

مسافة نقطة M من الفضاء عن المستقيم (D) المار من النقطة A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له هي: $d(M; D(A; \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

مثال أحسب مسافة النقطة $M(2;1;1)$ عن كل من المستقيمين (D_1) و (D_2) المعرفين بما يلي:

$$(D_2): x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2} \text{ و } (D_1): \begin{cases} x=1 \\ y=1-3t \\ z=4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

تمرين:

نعتبر في الفضاء النقط $A(1;1;0)$ و $B(2;3;4)$ و $C(-1;0;3)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. أحسب مساحة المثلث ABC
3. حدد معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) .