

Structures algébriques

البنيات الجبرية

ammarimaths-bm		I. مجموعات الأعداد :	
رمز المجموعة	التعريف بالمجموعة	القوانين المعتادة للمجموعة	بنية المجموعة والقانون
$\mathbb{IN}$	مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية $\mathbb{IN} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots \rightarrow\}$	الجمع و الضرب المعتادين	الجمع والضرب تجميعيان وتبادليان ويقبلان عنصرين محايدين هما على التوالي 0 و 1. غير أن عناصره المجموعة لا تتوفر على مقابلات (معدا 0) كما أنها لا تتوفر على مقلوب (معدا 1). لذلك فإن $\mathbb{IN}$ لا تتوفر على بنيات.
$\mathbb{Z}$	مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z} = \{\leftarrow \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \rightarrow\}$	الجمع و الضرب المعتادين	$(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية ومتكاملة
$\mathbb{ID}$	مجموعة الأعداد العشرية النسبية $\mathbb{ID} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{IN} \right\}$	الجمع و الضرب المعتادين	$(\mathbb{ID}, +)$ زمرة تبادلية $(\mathbb{ID}, +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية ومتكاملة
$\mathbb{Q}$	مجموعة الأعداد العشرية النسبية $\mathbb{ID} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{IN}^* \right\}$	الجمع و الضرب المعتادين	$(\mathbb{Q}, +)$ زمرة تبادلية $(\mathbb{Q}, +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية ومتكاملة
$\mathbb{IR}$	مجموعة الأعداد الحقيقية وتتضمن ، بالإضافة الى الأعداد الجبرية $(\mathbb{Q})$ ، الأعداد اللاجبرية $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \pi, e, \dots$	الجمع و الضرب المعتادين	$(\mathbb{IR}, +)$ زمرة تبادلية $(\mathbb{IR}, +, \times)$ جسم تبادلي.
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد العقدية : $\mathbb{C} = \{a + bi / a \in \mathbb{IR}, b \in \mathbb{IR}\}$	الجمع و الضرب المعتادين	$(\mathbb{C}, +)$ زمرة تبادلية $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي.

ammarimaths-bm	II. جذاءات ديكارتية لمجموعات الأعداد :
<u>خاصية:1</u> إذا كان $(E, +)$ زمرة (على التوالي تبادلية) ، فإن $(E^2, +)$ زمرة (على التوالي تبادلية) ، بحيث: $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$ بصفة عامة وبنفس الطريقة إذا كان $(E, +)$ زمرة (على التوالي تبادلية) ، فإن $(E^n, +)$ زمرة (على التوالي تبادلية) . <u>خاصية:2</u> إذا كان $(E, +, \times)$ حلقة أو جسم (على التوالي تبادلية) ، فإن $(E^2, +, \times)$ حلقة غير متكاملة وليس بجسم (على التوالي تبادلية) ، بحيث: $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$ $(x, y) \times (a, b) = (x \times a, y \times b)$ $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ بصفة عامة وبنفس الطريقة إذا كان $(E, +, \times)$ حلقة أو جسم (على التوالي تبادلية) ، فإن $(E^n, +, \times)$ حلقة غير متكاملة وليس جسما (على التوالي تبادلية). مثال: الحلقة $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ تبادلية وحادية وحدتها $(1, 1)$ ليست متكاملة لأنها تتضمن قواسم للصفر مثلا $(0, 1)$ و $(1, 0)$ لدينا: $(1, 0) \times (0, 1) = (0, 0)$ وهكذا يتبين أيضا أن $(1, 0)$ ليس له مقلوب (برهان بالخلف) نستنتج أن $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ ليس جسما. <u>خاصية:3</u> إذا كان $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي بعده p على $\mathbb{R}$، فإن $(E^2, +, \cdot)$ فضاء متجهي بعده p^2 على $\mathbb{R}$ ، بحيث: $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$ $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ بصفة عامة وبنفس الطريقة إذا كان $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي بعده p على $\mathbb{R}$ ، فإن $(E^n, +, \cdot)$ فضاء متجهي بعده p^n على $\mathbb{R}$.	

Structures algébriques

البنيات الجبرية

ammarmaths-bm

III. بنيات المصفوفات :

المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية

$$M_2(IR) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} / a \in IR, b \in IR, c \in IR, d \in IR \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & c+z \\ b+y & d+t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & az+ct \\ bx+dy & bz+dt \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.a & \lambda.c \\ \lambda.b & \lambda.d \end{pmatrix}$$

$(M_2(IR), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، غير تبادلية وغير متكاملة وبالتالي ليست جسما.

$(M_2(IR), +, \cdot)$ فضاء متجهي بعده 4 وأساسه القانوني هو $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

المصفوفات المربعة من الرتبة الثالثة

$$M_3(IR) = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & k \\ b & e & l \\ c & f & m \end{pmatrix} / a \in IR, b \in IR, c \in IR, \dots, m \in IR \right\}$$

بنفس الطريقة السابقة نعرف القوانين

$(M_3(IR), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها، غير تبادلية وغير متكاملة وبالتالي ليست جسما.

$(M_3(IR), +, \cdot)$ فضاء متجهي بعده 9.

مقلوب مصفوفة من الرتبة الثانية والثالثة

المصفوفة M قابلة للقلب يعني أن $\det(M) \neq 0$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

ammarmaths-bm

III. مجموعة التطبيقات العددية :

مجموعات التطبيقات العددية

ليكن I جزء غير فارغ من IR نرمز لمجموعة التطبيقات العددية من I نحو IR بالرمز $F(I, IR)$ أو IR^I

$(IR^I, +, \times)$ حلقة تبادلية صفرها التطبيق المنعدم ووحدته التطبيق الثابت والذي قيمته 1

لكن هذه الحلقة غير متكاملة وبالتالي ليست جسما.

$(IR^I, +, \cdot)$ فضاء متجهي

حلقات وفضاءات جزئية

نعتبر مجموعة الدوال المتصلة (على التوالي القابلة للاشتقاق) على مجال I ، ونرمز له C_I (على التوالي D_I) هاتين المجموعتين على سبيل المثال هي في نفس الآن حلقات وفضاءات جزئية لـ IR^I بنفس القوانين المحددة أعلاه.

حالات خاصة

نعتبر مجموعة التطبيقات في حالة $I = IN$ ، نحصل إذن على مجموعة المتتاليات العددية، وهكذا فإن مجموعة المتتاليات العددية حلقة وفضاء متجهي.

ammarmaths-bm

III. بنيات أخرى :

ملاحظات:	$P(E)$	$Z/n.Z$	$B(E,E)$
لقد حاولنا قدر الإمكان تقديم مجموعة لا بأس بها من البنيات المختلفة والتي نعتبرها ضرورية جدا للتمكن من إنجاز معظم التمارين. المرجو الاتصال بالموقع من أجل تنبيهنا لمختلف أوجه التقصير أو الأخطاء المحتملة ولتشجيعنا كذلك وشكرا	$(P(E), \Delta, \cap)$ حلقة تبادلية وواحدية.	$(Z/n.Z, +, \times)$ حلقة تبادلية، لكنها بصفة عامة غير متكاملة (حالة n غير أولي) لكونها تحتوي على قواسم للصفر. مثلا صنف 2 وصنف 3 هما قواسم صفر في حالة $Z/6.Z$. وتكون هذه الحلقة جسما، وبالتالي حلقة متكاملة إذا وفقط إذا كان n عددا أوليا.	نرمز بـ $B(E,E)$ لمجموعة التطبيقات من المجموعة E نحو نفسها. $(B(E,E), 0)$ زمرة عنصرها المحايد Id_E ، وكل تقابل مماثله هو تقابله العكسي.

ammarmaths-bm