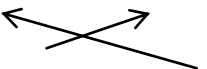
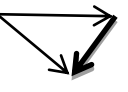


الدرس 2 : الحساب المتجهي في المستوى

عناصر التوجيهات التربوية	مكونات المقرر الرسمي
يتم التذكير بمفهوم جمع متجهتين و ضرب متجهة في عدد حقيقي ثم تقديم الخاصيات: و $a.(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + b\vec{v}$ و $(a + b). \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ $(b. \vec{u}) = (ab). \vec{u}$ من خلال أنشطة بسيطة. كما ينبغي ربط ضرب متجهة $\overrightarrow{AB}$ في عدد حقيقي x بالنقطة M من المستقيم (AB) التي أفصولها x في المعلم (A,B) أي أن : $\overrightarrow{AM} = x. \overrightarrow{AB}$ و بالتأويل المتجهي لإستقامية ثلاث نقط.	✓ تساوي متجهتين، جمع متجهتين، علاقة شال ضرب متجهة في عدد حقيقي. ✓ استقامية متجهتين، استقامية ثلاث نقط. ✓ تحديد متجهي لمنتصف القطعة.

الجواب 1	الجواب 2	
المتجهتان $\vec{CD}$ و $\vec{FE}$ 	اتجاه $\vec{FE}$ هو اتجاه المستقيم (EF) و طول $\vec{FE}$ هو EF	$\vec{EF} = \vec{CD}$
لدينا $\vec{AG} + \vec{AF} = \vec{AH}$ الشكل الذي يعبر عن المتساوية هو:		
ABCD متوازي الأضلاع إن:	$\vec{AD} = \vec{BC}$	$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
حدد المتساوية أو المتساويات التي عن : A و B و C نقط مستقيمة:	$AB = 3AC$	$\vec{AC} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$
إذا كان : $\vec{AC} = 3\vec{AB}$ فإن:	$\vec{BC} = 2\vec{AB}$	$\vec{BC} = 2\vec{BA}$

الجواب:

1- الجواب 2 لأن اتجاه $\vec{FE}$ هو المستقيم (FE) و $\|\vec{FE}\| = FE$.

2- الجواب 3 لأن AGHF متوازي الأضلاع.

3- الجواب 1 و 2 و 3 (3 علاقة شال ، 1 و 2 لأن ABCD متوازي الأضلاع)

4- الجواب 1 و 3 لأن A و B و C ثلاث نقط مستقيمة يعني أن $\vec{AB} = k\vec{AC}$ أو $\vec{AC} = k\vec{AB}$ أو $\vec{BC} = k\vec{AC}$

5- الجواب 1 (علاقة شال $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$) الجواب 2 (حسب الجواب 1)

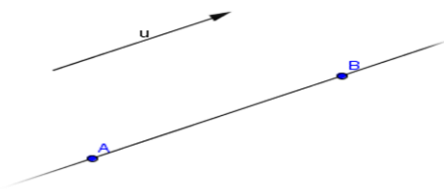
تقديم:

المتجهة أداة مساعدة في حل عدة مسائل مرتبطة بالتوازي و الإستقامية. ويلعب مفهوم المتجة دورا هاما في ميادين أخرى: كالإقتصاد، ومعالجة الصور....

يعتبر Roberval من بين الأوائل الذين استعملوا قاعدة متوازي الأضلاع في جمع القوى و السرعة، أما استعمال مفهوم متجهة دون ربطه بالإحداثيات واستعمال الرمز $\vec{AB}$ ، فقد تم في أواسط القرن 19، ويرجع الفضل في ذلك للعالمين الرياضيين William Hamilton و Herman Grassmann.

1. متجهات المستوى (تذكير)

(1) عناصر متجهة:



A و B نقطتان مختلفتان. اذا رمزنا لمتجهة $\vec{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فإن:

-اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم (AB) -منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A إلى B -منظم $\vec{u}$ هو المسافة AB، ونكتب $\|\vec{u}\| = AB$.

حالة خاصة: المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظما منعدم، وتسمى المتجهة المنعدمة، ونكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

خاصية: $\vec{u}$ متجهة و A نقطة من المستوى، توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$

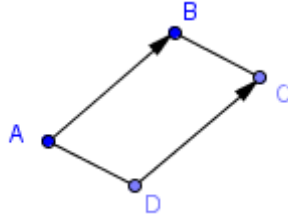


(2) تساوي متجهتين:

تعريف: نقول إن متجهتين متساويتان إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم.

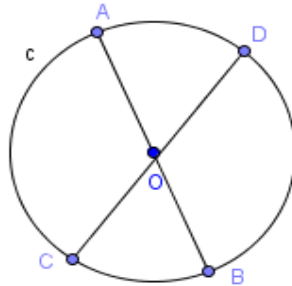


خاصية: ليكن ABCD رباعيا، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ تكافئ ABCD متوازي أضلاع.



مثال: في الشكل جانبه لدينا (C) دائرة و [AB] و [CD] قطران لهما.

بما أن O مركز الدائرة (C) فإن O منتصف القطرين [AB] و [CD]. وبالتالي ABCD متوازي الأضلاع، ومنه $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$



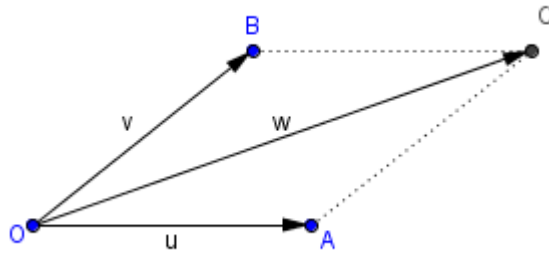
3) مجموع متجهتين:

1-علاقة شال: $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ لدينا لكل نقطة C من المستوى. ل نقطتان من المستوى. A و B

$$\vec{AB} + \vec{EC} + \vec{BE} + \vec{CA} = \vec{AE} + \vec{EC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0} \quad \text{مثال:}$$

2-قاعدة متوازي الأضلاع لإنشاء مجموع متجهتين: O و A و B ثلاث نقط مستقيمة.

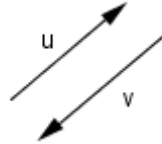
مجموع المتجهتين $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ هو المتجهة $\vec{OC}$ بحيث يكون الرباعي OACB متوازي الأضلاع.



3-مقابل متجهة:

خاصية: لنكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة.

مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه ونفس المنظم ومنحاه عكس منحى المتجهة $\vec{u}$ ، ويرمز لها بالرمز $-\vec{u}$.



$$-\vec{AB} = \vec{BA}$$

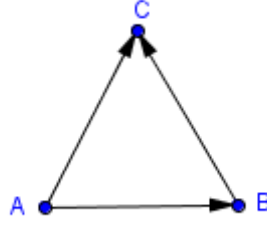
تطبيق 1: لنكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة. انشئ النقط D و E و F بحيث:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} \quad \text{أ-} \quad \vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AC} \quad \text{ب-} \quad \vec{BF} = \vec{BA} + \vec{CA} \quad \text{ج-}$$

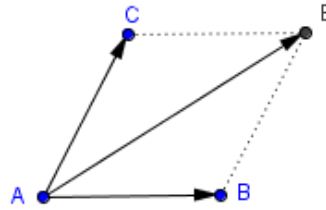
تطبيق 2: نعتبر المتجهة $\vec{u} = \vec{BC} - \vec{AC} - \vec{BA} + \vec{AB}$ بسط المتجهة $\vec{u}$

حل التطبيق 1:

أ- حسب علاقة شال لدينا: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ، المطلوب هو إنشاء النقطة D بحيث $\vec{AD} = \vec{AC}$ يعني D=C



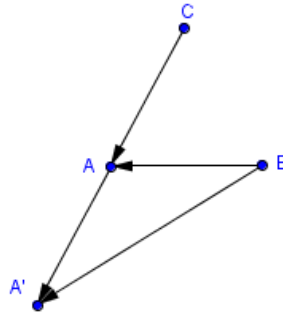
ب- بما أن: $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AC}$ فإن [AE] قطر متوازي أضلاع ABEC .



ج- إنشاء النقطة F: لدينا $\vec{BF} = \vec{BA} + \vec{CA}$

ننطلق من A وننشئ متجهة تساوي $\vec{CA}$ هي $\vec{AA'}$ ،

لدينا $\vec{BA} + \vec{CA} = \vec{BA} + \vec{AA'} = \vec{BA'}$ ومنه $\vec{BF} = \vec{BA'}$ أي $F = A'$



حل التطبيق 2:

لدينا: $\vec{u} = \vec{BC} - \vec{AC} - \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{AB} = \vec{BA} + \vec{AB} + \vec{AB} = \vec{BB} + \vec{AB} = \vec{AB}$

II. ضرب متجهة في عدد حقيقي:

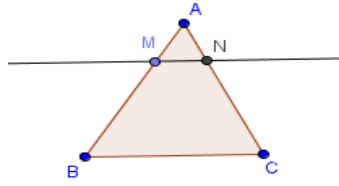
أنشطة:

نشاط 1: ليكن ABC مثلثاً، حيث AB=6 و M نقطة من [AB] حيث: AM=2 ، الموازي للمستقيم (BC) و المار من M يقطع [AC] في N.

1- عبر عن MN بدلالة BC.

2- عبر عن $\vec{MN}$ بدلالة $\vec{BC}$.

حل النشاط: حسب مبرهنة طاليس لدينا: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ، إذن: $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$



أي: $MN = \frac{1}{3}BC$ إذن $MN = \left(\frac{AM}{AB}\right) * BC = \frac{2}{6}BC$

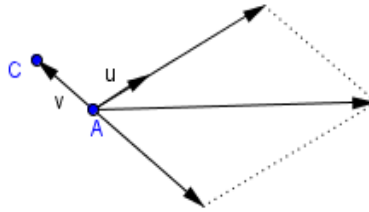
(2) بما أن $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{BC}$ لهما نفس الاتجاه و المنحى و أن $MN = \frac{1}{3}BC$

إذن نستنتج أن $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

نشاط 2: ليكن ABC مثلثاً، نضع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

انشئ $3\vec{u} - 2\vec{v}$ و $-2\vec{v}$

الحل:

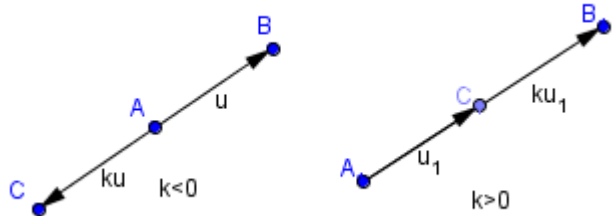


1- تعريف: $\vec{u}$ متجهة غير منعومة و k عدد حقيقي غير منعدم. جداء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث:

✓ $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه.

✓ $\|k\vec{u}\| = |k| * \|\vec{u}\|$

✓ منحنى $k\vec{u}$ هو : $\begin{cases} \text{منحنى } \vec{u} \text{ اذا كان } k > 0 \\ \text{عكس منحنى } \vec{u} \text{ اذا كان } k < 0 \end{cases}$



2- خاصيات:

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و لكل عددين حقيقيين k و k' لدينا:

$$\begin{aligned}
(k + k')\vec{u} &= k\vec{u} + k'\vec{u} \quad \checkmark \\
k(k'\vec{u}) &= (kk')\vec{u} \quad \checkmark \\
k(\vec{u} + \vec{v}) &= k\vec{u} + k\vec{v} \quad \checkmark \\
1.\vec{u} &= \vec{u} \quad \checkmark \\
\vec{u} = \vec{0} \text{ أو } k = 0 &\text{ تكافئ } k\vec{u} = \vec{0} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

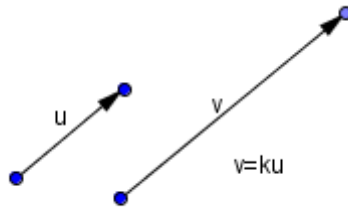
أمثلة:

$$\begin{aligned}
1. \quad 5\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AB} &= \left(5 - \frac{3}{2}\right)\vec{AB} = \frac{7}{2}\vec{AB} \\
2. \quad 2\vec{AB} + 2\vec{BC} &= 2(\vec{AB} + \vec{BC}) = 2\vec{AC} \\
3. \quad 2.\left(\frac{3}{2}\vec{AB}\right) &= \left(2 * \frac{3}{2}\right)\vec{AB} = 3\vec{AB} \\
4. \quad 2\vec{AB} = \vec{0} &\text{ تكافئ أن } \vec{AB} = \vec{0} \text{ أي أن } A = B
\end{aligned}$$

3- استقامية متجهتين-استقامية ثلاث نقط:

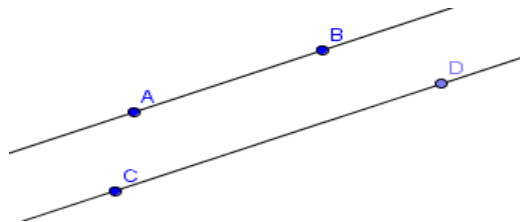
تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتان اذا وجد عدد حقيقي k غير منعدم حيث: $\vec{v} = k\vec{u}$



خاصية: لتكن A و B و C و D أربع نقط حيث: $A \neq B$ و $C \neq D$

$\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مستقيمتان اذا وفقط اذا كان (AB) و (CD) متوازيين.



إضافة:

لتكن A و B و C نقط من المستوى حيث $A \neq B$.

المتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مستقيمتان اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي α حيث: $\vec{AC} = \alpha\vec{AB}$

العدد الحقيقي α يسمى أفصول C في المعلم (A ; B).

مثال:

$$-3 \text{ أفصول E في المعلم (A ; B) ؛ } \vec{AE} = -3\vec{AB} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{2} \text{ أفصول F في المعلم (C ; D) ؛ } \vec{CF} = \sqrt{2}\vec{CD} \quad \checkmark$$

تطبيق 1 :

لتكن A و B و C و M أربع نقط و $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$ و $\vec{v} = 2\vec{BA} - 6\vec{BC}$ متجهتين حيث:

1- بين أن: $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتان.

حل التطبيق 1 : لدينا $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{MA} + 2\vec{MA} + 2\vec{AB} - 3\vec{MA} - 3\vec{AC} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$

2- لأبين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتان:

$$\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} = 2\vec{AB} - 3\vec{AB} - 3\vec{BC} = -\vec{AB} - 3\vec{BC} = \vec{BA} - 3\vec{BC} = \frac{1}{2}(2\vec{BA} - 6\vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{v}$$

ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتان.

خاصية: لتكن A و B و C نقط من المستوى حيث $A \neq B$.

تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث: $\vec{AC} = k\vec{AB}$

تطبيق 2: نعتبر النقط A و B و M بحيث: $2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 3\vec{AB} = \vec{0}$

بين أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

حل التطبيق 2:

$M \in (AB)$ يعني أن النقط A و B و M مستقيمة، ومنه نبحت عن كتابة $\vec{AM}$ بدلالة $\vec{AB}$ (مثلا).

لدينا: $2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 3\vec{AB} = \vec{0}$ يعني أن: $2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 3\vec{AB} = \vec{0}$

(باستعمال علاقة شال: $\vec{MB} = \vec{MA} + \vec{AB}$)

يعني أن: $5\vec{MA} + 6\vec{AB} = \vec{0}$ أي: $5\vec{MA} = -6\vec{AB}$ إذن: $\vec{AM} = \frac{6}{5}\vec{AB}$

و بالتالي المتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{AM}$ مستقيمتان، ومنه النقط A و B و M مستقيمة أي M تنتمي إلى المستقيم (AB).

تطبيق 3:

ليكن ABC مثلثا و I و J نقطتين حيث: $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ و $\vec{AJ} = 3\vec{AC}$.

1- عبر عن $\vec{IC}$ و $\vec{BJ}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$.

2- استنتج أن: (IC) يوازي (BJ).

حل التطبيق:

$$\vec{IC} = \vec{IA} + \vec{AC} = \vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB} \quad \text{و} \quad \vec{BJ} = \vec{BA} + \vec{AJ} = 3\vec{AC} - \vec{AB}$$

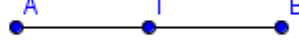
$$\vec{BJ} = 3\left(\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}\right) = 3\vec{IC}$$

ومنه فإن: (IC) و (BJ) متوازيان.

III. منتصف قطعة:

1- منتصف قطعة: لتكن [AB] قطعة.

نقول ان I منتصف القطعة [AB] اذا كان $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$



2- خاصية: لتكن [AB] قطعة.

I منتصف القطعة [AB] اذا وفقط اذا كانت I تحقق احدى المتساويتين:

$$\vec{AI} = \vec{IB} \quad (1) \quad \vec{AB} = 2\vec{AI} \quad (2)$$

3- خاصية: (الخاصية المميزة لمنتصف قطعة)

لتكن [AB] قطعة منتصفها I.

لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB}$

برهان:

لتكن [AB] قطعة و I منتصفها. لتكن M نقطة من المستوى لدينا:

$$\vec{MA} + \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) + (\vec{MI} + \vec{IB}) = 2\vec{MI} + \vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{MI} \quad \text{لأن } (\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0})$$

و منه لكل نقطة M من المستوى لدينا: $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

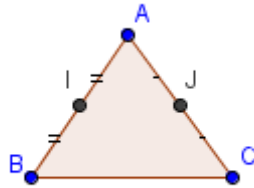
4- خاصية: (خاصية منتصفى ضلعي مثلث)

ليكن ABC مثلثا، اذا كان I منتصف القطعة [AB] و J منتصف القطعة [AC] فإن $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

برهان:

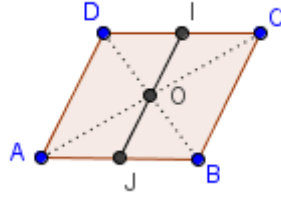
ليكن ABC مثلثا. I و J هما على التوالي منتصفى القطعتين [AB] و [AC].

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{BC} \quad \text{لدينا}$$



تطبيق:

ليكن ABCD متوازي أضلاع مركزه O. I و J على التوالي منتصفتي القطعتين [AB] و [CD].



2- استنتج أن O هو منتصف القطعة [IJ].

$$1- \text{ بين أن } \vec{OI} = \frac{1}{2} \vec{CB}$$

حل التطبيق:

1- لدينا في المثلث ACB، O منتصف [AC] . (لأن O مركز متوازي الأضلاع ABCD) و I منتصف [AB] (حسب المعطيات).

$$\text{حسب خاصية منتصفتي ضلعي مثلث فإن } \vec{OI} = \frac{1}{2} \vec{CB}$$

2- باعتبار المثلث ACD و تطبيق خاصية منتصفتي ضلعي مثلث، لدينا : $\vec{OJ} = \frac{1}{2} \vec{AD}$

$$\text{ومنه } \vec{OI} + \vec{OJ} = \frac{1}{2} \vec{CB} + \frac{1}{2} \vec{AD} = \frac{1}{2} (\vec{CB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2} (\vec{CB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2} \vec{CC} = \vec{0}$$

اذن O منتصف القطعة [IJ].

نهاية الدرس