

المادة: الرياضيات

درس رقم/3

الأستاذ: نجيب عثمانى

ملخص لدرس: الترتيب في

مجموعة الأعداد الحقيقية

مستوى الجذع مشترك علمي

I. الترتيب و العمليات:

تعريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين.1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b , و نكتب $a \leq b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ 2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b , و نكتب $a \geq b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$ 3. نقول إن a أصغر قطعاً من b , و نكتب $a < b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$ 4. نقول إن a أكبر قطعاً من b , و نكتب $a > b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

ملحوظة:

 a و b عددان حقيقيان.• $a \leq b$ يكافئ $a < b$ أو $a = b$ • إذا كان $a < b$ فإن $a \leq b$ • مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعبيرات التالية: $a < b$, $a > b$, $a = b$ أمثلة: لدينا: $3 < \sqrt{5}$, $-\frac{1}{3} < -7$, $\pi > 2,14$ نضع $a = 2 + \sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$ لدينا $a - b = 2 - \sqrt{3}$, و بما أن $2 - \sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعاً أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$ فإن: $a > b$

خاصيات:

لتكن a و b و c و d أعداداً حقيقية.

خاصية 1:

إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$

ملحوظة:

إذا كان $a \leq b$ و $b < c$ فإن $a < c$ الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة a مع نفس العدد b .

مثال:

لدينا: $1 < \frac{114,01}{114}$ و $\frac{114,01}{114} < \frac{30}{31}$ و منه فإن: $\frac{30}{31} < \frac{114,01}{114}$

خاصية الترتيب و الجمع:

 $a \leq b$ يكافئ $a + c \leq b + c$ ▪ إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a + c \leq b + d$ ▪ إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فإن $a + b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c > 0$, فإن: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$
- إذا كان $c < 0$, فإن: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$
- إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فإن $0 \leq ac \leq bd$
- إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فإن $a + b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب:

$$a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة } (ab > 0) \quad a \leq b \text{ يكافئ } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

إذا كان $a \leq b$ و $c < d$ فإن $a + c < b + d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عدنان حقيقيان موجبان.

$$a \leq b \text{ يكافئ } a^2 \leq b^2$$

$$a \leq b \text{ يكافئ } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

$$\text{لكل } a \text{ من } \mathbb{R}: a^2 \geq 0$$

ملحوظة:

جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة إذا عوضنا الرمز $\leq$ بأحد الرموز: $\geq$ أو $<$ أو $>$.

$$\text{إذا كان } a \leq 0 \text{ و } b \leq 0 \text{ يكافئ } a^2 \geq b^2$$

II. المجالات و التأطير:

المجالات:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$. ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.

المجالات المحدودة:

المجال	المتفاوتة
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
$]a, b]$	$a < x \leq b$
$[a, b[$	$a \leq x < b$
$]a, b[$	$a < x < b$

المجالات غير المحدودة

المجال	المتفاوتة
$]b, +\infty[$	$x > b$
$[b, +\infty[$	$x \geq b$
$] -\infty, a]$	$x \leq a$
$] -\infty, a[$	$x < a$

مصطلحات:

الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a, b]$ يقرأ: "المجال المغلق a, b " أو " القطعة a, b "
- $]a, b[$ يقرأ " المجال المفتوح a, b "
- $]a, +\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة:

$$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0] \text{ و } \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$$

$$\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[\text{ و } \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$$

تأطير عدد حقيقي:

تعريف:

ليكن x عددا حقيقيا.
تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a < b$ بحيث: $a \leq x \leq b$ أو $a < x < b$ أو $a \leq x < b$ أو $a < x \leq b$.
العدد الحقيقي الموجب قطعاً $b - a$ يسمى سعة التأطير.
العددان a و b هما محداث التأطير.

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف:

ليكن x عددا حقيقيا و M نقطة ذات الأفصول x من المستقيم العددي.

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM . و نكتب: $OM = |x|$

العلاقة بين إشارة x و القيمة المطلقة:

إذا كان $x \geq 0$ فإن $OM = x$ و منه فإن: $|x| = x$

إذا كان $x \leq 0$ فإن $OM = -x$ و منه فإن: $|x| = -x$

$$\text{مثال: } |3| = 3 \quad \left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5} \quad |1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3} \quad |3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$$

ملحوظة: لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $|x| \geq 0$ و $|x|^2 = x^2$ و $|x| \leq x \leq |x|$ و $-|x|$.

خاصيات:

على المستقيم العددي، x و $-x$ هما على التوالي أفصولا M و M' .
لدينا M و M' متماثلتان بالنسبة للنقطة O ، و منه فإن $OM = OM'$ يعني أن: $|x| = |-x|$

خاصيات:

- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |-x|$ و $|x| = \sqrt{x^2}$.
- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|xy| = |x||y|$, $|x + y| \leq |x| + |y|$
- إذا كان $y \neq 0$ فإن: $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$.

IV. المسافة و القيمة المطلقة:

تعريف:

ليكن x و y عددين حقيقيين.

المسافة بين العددين x و y هي العدد الحقيقي $|x - y|$.

خاصية:

ليكن x من $\mathbb{R}$ و r من $\mathbb{R}_+^*$.

$$|x| \leq r \text{ يكافئ } -r \leq x \leq r$$

$$|x| \geq r \text{ يكافئ } x \geq r \text{ أو } x \leq -r$$

استنتاج:

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث: $a < b$
المسافة بين العددين a و b أي $|b - a| = b - a$ تسمى طول أو سعة المجال $[a, b]$.

العدد $c = \frac{a+b}{2}$ يسمى مركز المجال $[a, b]$.

العدد $c = \frac{b-a}{2}$ يسمى شعاع المجال $[a, b]$.

و منه $x \in [a, b]$ يكافئ $|x - c| \leq r$ يكافئ $c - r \leq x \leq c + r$.

مثال:

من أجل المجال $[-2, 10]$ لدينا

العدد $12 - (-2) = 10$ هو طوله.

العدد $c = \frac{10-2}{2} = 4$ هو مركزه

العدد $r = \frac{12}{2} = 6$ هو شعاعه إذن: $x \in [-2; 10]$ يكافئ $|x - 4| \leq 6$.

V. التقريبات والتقريب العشري:

التقريبات:

تعريف:

- ليكن a و x عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً.
- إذا كان $a \leq x \leq a + r$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتقريب.
 - إذا كان $a - r \leq x \leq a$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.
 - إذا كان $|x - a| \leq r$, نقول إن a قيمة مقربة (أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r .

خاصية:

إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطيرا للعدد x فإن:

- العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b - a$ بتقريب.
- العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b - a$ بإفراط.
- العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال:

من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$ نستنتج أن:

- العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.
- العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.
- العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتقريب.

التقريب العشري لعدد حقيقي:

الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث:

$p \leq x < p + 1$, p يسمى الجزء الصحيح للعدد x و نكتب: $E(x) = p$

مثال:

لدينا: $1 \leq \sqrt{2} < 2$ و منه فإن $E(\sqrt{2}) = 1$

و لدينا: $0 < -\frac{1}{3} \leq -1$ و منه فان $E\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

تعريف:

ليكن x عددا حقيقيا و n غددا صحيحا طبيعيا و p الجزء الصحيح للعدد الحقيقي $10^n \cdot x$ أي $E(10^n \cdot x) = p$

لدينا: $p \leq 10^n \cdot x < p+1$ و منه فان $(p+1) \cdot 10^{-n} > x \geq 10^n \cdot p$

- العدد العشري $p \cdot 10^{-n}$ يسمى التقريب العشري للعدد x بالدقة 10^{-n} أو (من الرتبة n) بتقريب.
- العدد العشري $(p+1) \cdot 10^{-n}$ يسمى التقريب العشري للعدد x بالدقة 10^{-n} (أو من الرتبة n) بإفراط.

مثال:

لدينا: $1,732 \leq \sqrt{3} < 1,733$ أي $(1732+1) \cdot 10^{-3} > \sqrt{3} \geq (1732) \cdot 10^{-3}$

إذن: $1,732$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب. و $1,733$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.