

I - اشتقاق دالة عددية في نقطة :

نشاط تمهيدى :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^3$. احسب : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$

إذن : يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = l$

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في $a = 1$ والعدد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12$ يسمى العدد المشتق للدالة f في $a = 1$ ؛

ويرمز له بالرمز $f'(a)$.

1) تعريف :

لنكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$. نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l حيث :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a ونرمز له بالرمز $f'(a)$ أو $\frac{df}{dx}(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ونكتب :

ملاحظات :

1. في التعريف السابق يمكن أن نضع : $x - a = h$ فيصبح التعريف :

$$f \text{ قابلة للاشتقاق في } x_0 \text{ إذا وجد عدد حقيقي } l \text{ حيث : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

$$2. \text{ إذا وضعنا : } \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \text{ فإن : } f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varphi(x)$$

$$\text{مع : } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$$

$$\text{وبوضع : } x = a + h \text{ فإن : } f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \text{ مع } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

تطبيقات :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^3 - x^2$.

بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في $a = 1$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = \sqrt{|x|}$. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $a = 0$.

3. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = \sin x$. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $a = \pi$.

2) تقريب دالة قابلة للاشتقاق بدالة تآلفية :

تعريف :

لنكن f دالة قابلة للاشتقاق في a . الدالة : $x \mapsto f(a) + (x - a)f'(a)$ (أو الدالة : $h \mapsto f(a) + hf'(a)$) تسمى الدالة التآلفية المماسية للدالة f في النقطة a . وتسمى أيضا تقريب للدالة f بجوار a .

العدد : $f(a) + hf'(a)$ هو التقريب التآلفي للعدد $f(a+h)$ بجوار a ونكتب : $f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$.

تطبيقات :

1) نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^3$.

أ - حدد تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار $a = 1$.

ب - استنتج قيمة مقربة للعدد $(1.00003)^3$.

2) نعتبر الدالة g المعرفة على IR بما يلي : $g(x) = \sqrt{1+x}$.

أ - حدد تقريبا تألفيا للدالة g بجوار $a = 0$.

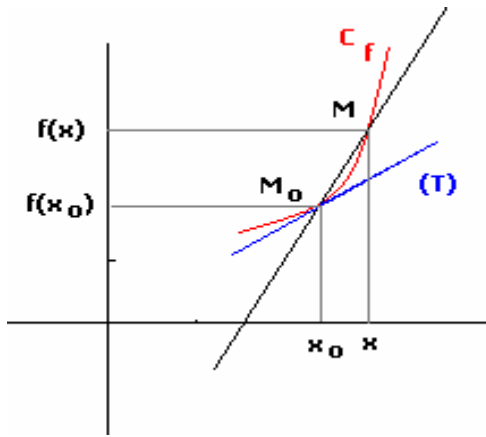
ب - استنتج قيمة مقربة للعدد $\sqrt{1,0008}$.

3) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $h(x) = \frac{1}{1+x}$

أ - حدد تقريبا تألفيا للدالة g بجوار $a = 1$.

ب - استنتج قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{1,006}$.

3) التأويل الهندسي :



لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 وليكن (C_f) منحناها في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ متعامد منظم .

وليكن (T) المستقيم الممثل للدالة التآلفية المماسية للدالة f في

x_0 .

نعتبر M_0 و M نقطتين من (C_f) أفصولهما على التوالي x_0 و

$x_0 + h$.

المعامل الموجه للمستقيم (MM_0) هو : $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

النقطة M تقترب من M_0 كلما اقترب h من 0 .

وبما أن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المعامل الموجه يؤول

إلى $f'(x_0)$ الذي هو المعامل الموجه للمستقيم (T) .

تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 و (C_f) منحناها في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ متعامد منظم . المستقيم الممثل للدالة التآلفية المماسية للدالة f في x_0 يسمى مماس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$.

خاصية :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f .

معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ هي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

تمرين تطبيقي :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = \sin x$ ؛ أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة f في $x_0 = \pi$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^2 + 2x$.

بين أن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$ وأعط معادلة المماس لمنحنى الدالة f في $x_0 = 1$.

4) الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار :

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a; a + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا

كان يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في a ونرمز له

بالرمز $f'_d(a)$ ونكتب : $f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ أو $f'_d(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

تعريف 2 :

لنكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a-\alpha; a]$ حيث $\alpha > 0$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في a إذا كان يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في a ونرمز له

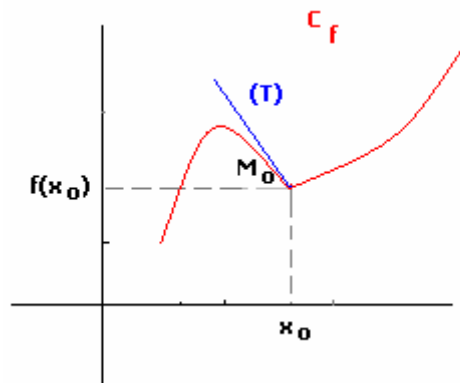
بالرمز $f'_g(a)$ ونكتب : ونكتب : $f'_g(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ أو $f'_g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

التأويل الهندسي :

لنكن دالة عددية منحناها (C_f) في معلم متعامد و $A(a; f(a))$ نقطة من (C_f) .

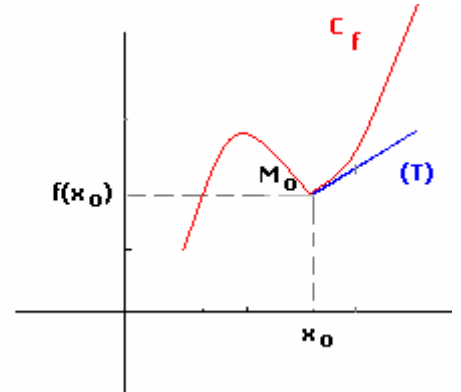
➤ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في a فإن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس على اليمين في a معاملته الموجه هو $f'_d(a)$.

➤ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليسار في a فإن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس على اليسار في a معاملته الموجه هو $f'_g(a)$.



معادلة نصف المماس (T) هي :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$



معادلة نصف المماس (T) هي :

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

خاصية :

لنكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$. نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة للاشتقاق على اليسار في a و $f'_g(a) = f'_d(a)$.

في الشكل جانبه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 وقابلة

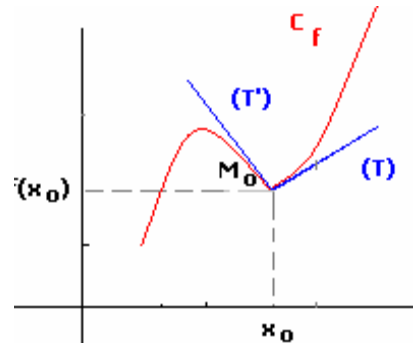
للاشتقاق على اليسار في x_0 لكن $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$

إذن : f غير قابلة للاشتقاق في x_0 .

معدلتني نصف المماسين هما :

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases} \text{ معادلة نصف المماس } (T) \text{ هي :}$$

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases} \text{ معادلة نصف المماس } (T') \text{ هي :}$$



تطبيقات :

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = |x^2 - 1|$

ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في وعلى اليسار في النقطة 1 ثم في النقطة -1.

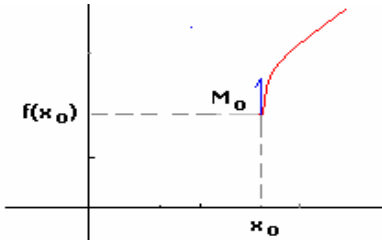
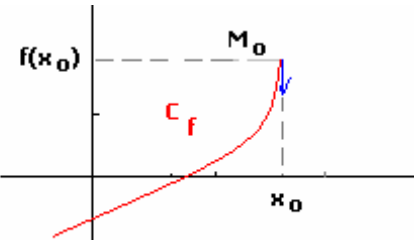
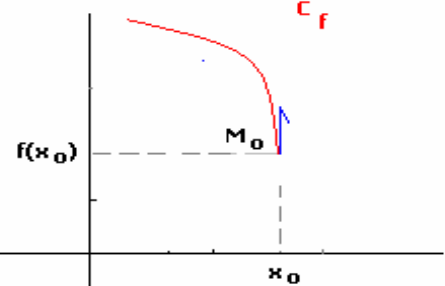
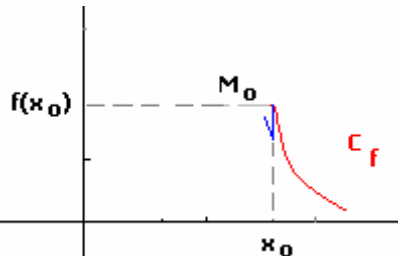
(2) نعتبر الدالة نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{x}$

ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0.

لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

التأويل الهندسي : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليمين في 0 .

بصفة عامة لدينا :

	➤ إذا كان $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليمين في a .
	➤ إذا كان $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل على اليمين في a .
	➤ إذا كان $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليسار في a .
	➤ إذا كان $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل على اليسار في a .

II - الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة :

(1) تعاريف :

➤ نقول إن f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

- نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a; b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال المفتوح $]a; b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة للاشتقاق على اليسار في b .
- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . الدالة المعرفة على I بما يلي: $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' .
- لتكن f قابلة للاشتقاق على مفتوح I . إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ويرمز لها بالرمز f'' .

ملاحظة:

بنفس الطريقة نعرف الدالة المشتقة الثالثة للدالة f (الدالة المشتقة من الرتبة 3) والتي يرمز لها بالرمز: f''' أو $f^{(3)}$ كما نعرف بنفس الطريقة الدالة المشتقة من الرتبة 4 و والدالة المشتقة من الرتبة n والتي يرمز لها على التوالي بالرمز $f^{(4)}$ و و $f^{(n)}$.

تمرين تطبيقي:

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي: $f(x) = 2x^3$.

- (1) بين أن f قابلة للاشتقاق على IR .
- (2) بين أن f قابلة للاشتقاق مرتين على IR .

الجواب:

(1) بين أن f قابلة للاشتقاق على IR :

ليكن a عنصرا من IR .

$$\text{لدينا: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(a+h)^3 - 2a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2a^3 + 6a^2h + 6ah^2 + 2h^3 - 2a^3}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (6a^2 + 6ah + 2h^2) = 6a^2$$

إذن: f قابلة للاشتقاق في a ولدينا $f'(a) = 6a^2$. وهذا صحيح لكل a من IR .

إذن: f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا: $f'(x) = 6x^2$ $\forall x \in IR$.

(2) نبين أن f قابلة للاشتقاق مرتين على IR :

من أجل ذلك نبين أن f' قابلة للاشتقاق على IR .

ليكن a عنصرا من IR .

$$\text{لدينا: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(a+h)^2 - 6a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6a^2 + 12ah + 6h^2 - 6a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12a + 6h) = 12a$$

إذن: f' قابلة للاشتقاق في a .

وبالتالي فإن: f قابلة للاشتقاق مرتين في a ولدينا: $f''(a) = 12a$. وهذا صحيح لكل a من IR .

إذن: f قابلة للاشتقاق مرتين على IR ولدينا: $f''(x) = 12x$ $\forall x \in IR$.

III - العمليات على الدوال المشتقة - الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية:

1) الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية:

الدالة f	الدالة المشتقة	مجموعة التعريف	الدالة f	الدالة المشتقة	مجموعة التعريف
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	IR	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	IR^*
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	IR	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$ غير قابلة للاشتقاق في 0
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	IR	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	IR
$f(x) = x^n$ ($n \in IN^* - \{1\}$)	$f'(x) = nx^{n-1}$ ($n \in IN^* - \{1\}$)	IR	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	IR

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\frac{1}{[\cos(x)]^2} = 1 + [\tan(x)]^2 \quad f'(x) =$	$f(x) = \tan x$	IR^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
-------------------------------	---	-----------------	--------	--------------------------	----------------------

2) العمليات على الدوال المشتقة :

خاصيات :

لنكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I .

1) الدالة $f + g$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \forall x \in I$.

2) الدالة αf حيث $\alpha \in IR$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x) \quad \forall x \in I$.

3) الدالة $f.g$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \forall x \in I$.

4) إذا كان $\forall x \in I : f(x) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} \quad \forall x \in I$.

5) إذا كان $\forall x \in I : g(x) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$$\forall x \in I : \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

6) الدالة f^n (حيث $n \in IN^*$) قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x) \quad \forall x \in I$.

7) إذا كان $\forall x \in I : f(x) \neq 0$ فإن الدالة f^n (حيث $n \in Z^*$) قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$$\forall x \in I : (f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

نتيجة :

➤ كل حالة حدودية قالية للاشتقاق على IR .

➤ كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

تطبيقات :

احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x) = (x^2 - 2x)^3$ (5	$f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$ (1
$f(x) = \sin x(1 + \cos^2 x)$ (6	$f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x)$ (2
$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x}$ (7	$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ (3
$f(x) = \frac{1}{\tan x \sin x}$ (8	$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - x}$ (4

3) الدالة المشتقة للدالتين $f(ax+b)$ و $\sqrt{f}$:

خاصية 1 :

لنكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و a و b عددين حقيقيين. ونعتبر J مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث :

$$\forall x \in J : g(x) = af'(ax+b) \quad \text{الدالة : } g : x \mapsto f(ax+b) \quad \text{قابلة للاشتقاق على } J \quad \text{ولدينا : } g'(x) = af''(ax+b)$$

أمثلة :

$$(\sin(3x+1))' = 3 \cdot \cos(3x+1) \quad \text{➤}$$

$$(\cos(3x+1))' = -3 \cdot \sin(3x+1) \quad \text{➤}$$

$$(\tan(3x+1))' = \frac{3}{(\cos(3x+1))^2} \quad \text{➤}$$

خاصية 2 :

لنكن f دالة موجبة قطعاً وقابلة للاشتقاق على مجال I .

$$\text{الدالة } \sqrt{f} \text{ المعرفة بما يلي : } x \mapsto \sqrt{f(x)} \quad \text{قابلة للاشتقاق على } I \quad \text{ولدينا : } (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \forall x \in I$$

مثال :

لنحدد الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
لدينا : الدالة $x \mapsto x^2 + 2x + 3$ دالة حدودية إذن فهي قابلة للاشتقاق على IR .
ولدينا : $x^2 + 2x + 3 > 0$ لكل x من IR (لأن مميز $x^2 + 2x + 3$ سالب و $a = 1 > 0$)
إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا لكل x من IR :

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 3)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

IV - تطبيقات الاشتقاق :

1) رتبة دالة وإشارته دالتها المشتقة :

نشاط تمهيدى :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^2$
- حدد تغيرات الدالة f على IR .
- احسب $f'(x)$ واستنتج إشارتها على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $] -\infty; 0]$. ما ذا تستنتج ؟
الجواب :
- لدينا : f تزايدية على المجال $[0; +\infty[$ وتناقصية على المجال $] -\infty; 0]$.
- ولدينا : $f'(x) = 2x$ إذن : $f'(x) \geq 0$: $\forall x \in [0; +\infty[$ و $f'(x) \leq 0$: $\forall x \in] -\infty; 0]$
خاصية :
لتكن f دالة

اليمني محمد www.sbaysite.com