

المادة: الرياضيات

درس رقم 3/

الأستاذ: نجيب عثمانى

ملخص لدرس المرجع

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا (علوم تجريبية)

I. مرجح نقطتين متزنتين

1.1. نقطة متزنة

لتكن A نقطة من المستوى و a عددا حقيقيا
الزوج $(A; a)$ يسمى نقطة متزنة و العدد a يسمى وزن النقطة A
(نقول كذلك أن النقطة A معينة بالمعامل a).

1.2. خاصية و تعريف

لتكن $(A; a)$ و $(B; b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a + b \neq 0$
توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A; a)$ و $(B; b)$.

ملحوظة :

النقطة G تسمى كذلك مرجح النظمة المتزنة $\{ (A; a) \text{ و } (B; b) \}$.

1.3. خاصيات مرجح نقطتين متزنتين

1.3.1. الصمود

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب معامليهما في عدد حقيقي غير منعدم:
إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A; a)$ و $(B; b)$ فإن لكل k من $\mathbb{R}^*$,
 G هو كذلك مرجح النقطتين المتزنتين $(A; ka)$ و $(B; kb)$

1.3.2. الخاصية المميزة

لتكن $(A; a)$ و $(B; b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a + b \neq 0$
ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A; a)$ و $(B; b)$ إذا وفقط إذا لكل نقطة M من المستوى : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$

استنتاج :

بوضع : $M = A$ (على التوالي $M = B$) في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ (على التوالي)

$\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$ وهذه الكتابات تمكننا من رسم النقطة G وتبين لنا أن : A و B و G نقط مستقيمة.

II. مرجح ثلاث نقط متزنة:

1.1. خاصية و تعريف

لتكن $(A; a)$ و $(B; b)$ و $(C; c)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث $a + b + c \neq 0$
توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A; a)$ و $(B; b)$ و $(C; c)$.

حالة خاصة :

إذا كان : $a = b = c$ فإن مرجح النقط المتزنة $(A; a)$ و $(B; b)$ و $(C; c)$ يسمى كذلك مركز ثقل المثلث ABC

1.2. خاصيات مرجح ثلاث نقط متزنة

1.2.1. الصمود

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A; a)$ و $(B; b)$ و $(C; c)$ فإن لكل k من $\mathbb{R}^*$,
 G هي كذلك مرجح النقط المتزنة $(A; ka)$ و $(B; kb)$ و $(C; kc)$

1.3.3. الخاصية المميزة

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c \neq 0$ ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ إذا وفقط إذا لكل نقطة M من المستوى :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$$

استنتاج :

بوضع : $M = A$ في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ وهذه العلاقة تمكننا من رسم النقطة G

1.3.4. تجميعية المرجح

تكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b \neq 0$ و $a+b+c \neq 0$

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ وكانت H مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ فإن G مرجح $(H;a+b)$ و $(C;c)$

III. مرجح أربع نقط متزنة:

خاصية وتعريف

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ و $(D;d)$ أربع نقط متزنة من المستوى بحيث $a+b+c+d \neq 0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}$
 النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ و $(D;d)$.

ملاحظة : يتم تقديم خاصيات أربع نقط كما تم تقديمها بالثلاث نقط

IV. إحداثيتي المرجح:

المستوى منسوب إلى معلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ولتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ و $(D;d)$ أربع نقط متزنة من المستوى

1.3. إحداثيتا مرجح نقطتين

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b} \end{array} \right. : \text{إذا كان } G \text{ مرجح النقطتين المتزنتين } (A;a) \text{ و } (B;b) \text{ فإن إحداثيتي } G \text{ هما :}$$

1.4. إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{array} \right. : \text{إذا كان } G \text{ مرجح النقط المتزنة } (A;a) \text{ و } (B;b) \text{ و } (C;c) \text{ فإن إحداثيتي } G \text{ هما :}$$

1.5. إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ و $(D;d)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{array} \right. : \text{فإن إحداثيتي } G \text{ هما :}$$