

درس رقم 4/

الأستاذ: نجيب عثماني

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس: الحدوديات

ثانوية ابن خلدون التاهيلية

عين بني مطهر

مستوى الجذع مشترك علمي

تقديم حدودية - تساوي حدوديتين:

تقديم حدودية:

أمثلة و تعاريف:

← التعبير $\frac{1}{3}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \frac{1}{3}$ هو حدودية.← $\frac{1}{2}x^3$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 3.← $-\sqrt{2}x^2$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 2.← x يسمى حد الحدودية من الدرجة 1.← $-\frac{1}{3}$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 0 و يسمى كذلك الحد الثابت.← الحد الأكبر درجة هو $\frac{1}{2}x^3$, العدد 3 يسمى درجة الحدودية $\frac{1}{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \frac{1}{3}$.← كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل: $ax + b$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$.← التعبير $x^2 + 2\sqrt{x} + 5$ ليس بحدودية لأنها تحتوي على $\sqrt{x}$.← الحدودية: $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$ درجاتها 4.

← 3 هو معامل الحد من الدرجة 4 , 1 هو معامل الحد من الدرجة 3 , 0 هو معامل الحد من الدرجة 2.

← -7 هو معامل الحد من الدرجة 1 , $\sqrt{3}$ هو معامل الحد من الدرجة 0.

← نرمز عادة لحدودية بأحد الرموز:

← $P(x)$ أو $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$ ← نعتبر الحدودية: $P(x) = 4x^2 - x^3 + x^4 + 3 + x$.← يمكن كتابة الحدودية $P(x)$ ❖ إما على شكل: $P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 3$ و نقول إننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التزايدية.❖ إما على شكل: $P(x) = 3 + x + 4x^2 - x^3 + x^4$ و نقول أننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التناقصية.

تعريف:

الحدودية المنعدمة هي الحدودية التي جميع معاملاتها تساوي صفرا. أي $P(x) = 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ملحوظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

تساوي حدوديتين:

خاصية:

تكون حدوديتان متساويتين اذا و فقط اذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

مثال:

نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث: $P(x) = (a-1)x^3 + 2ax^2 + 5x + 6$ و $Q(x) = x^3 + 4x^2 + (3+a)x^2 + 3a$.
حيث a عدد حقيقي يخالف 1. لنحدد قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين.

- $P(x)$ و $Q(x)$ لهما نفس الدرجة و هي 3 (لأن $a \neq 1$)
 - $P(x) = Q(x)$ يعني أن المعاملات من نفس الدرجة متساوية أي: $a-1=1$ و $2a=4$ و $3+a=5$ و $3a=6$.
- إذن: $a=2$. و بالتالي تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين إذا كانت $a=2$.

تمرين : التعرف على حدودية و درجتها

حدد من بين التعابير التالية , الحد و ديات و درجتها:

$$1. P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{3}$$

$$2. P(x) = 2x^2 - x - \sqrt{x}$$

$$3. P(x) = 5|x^2| + 4|x| - 5$$

$$4. P(x) = \frac{5}{3}x^2 + x + 2 - 7x^4$$

$$5. P(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 3$$

$$6. P(x) = 4$$

$$7. P(x) = (a-1)x^4 + x^2 + x + 1 \text{ حيث } a \in \mathbb{R}$$

تمرين : تساوي حدوديتين

أدرس تساوي $P(x)$ و $Q(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

$$1. Q(x) = x^2(3x-2) + x, \quad P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x$$

$$2. Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1, \quad P(x) = (x+1)^3$$

$$3. Q(x) = x^2 + 3x - 4, \quad P(x) = x^3 + (x-2)^2$$

جمع و ضرب حدوديتين:

خاصية 1:

مجموع حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x) + Q(x)$.

جاء حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x) \times Q(x)$.

خاصية 2:

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$$d^0(P(x) + Q(x)) \leq d^0 P(x) \text{ أو } d^0(P(x) + Q(x)) \leq d^0 Q(x) \text{ في حالة } P(x) + Q(x) \text{ حدودية غير منعدمة.}$$

$$d^0(P(x) \times Q(x)) = d^0 P(x) + d^0 Q(x)$$

مثال: أحسب مجموع و جاء الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث: $P(x) = x^2 + x + 1$ و $Q(x) = x^3 - x^2 + 2$.

$$\text{لدينا: } P(x) + Q(x) = (x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 2) = x^3 + x + 3$$

$$\text{لدينا: } P(x) \times Q(x) = (x^2 + x + 1) \times (x^3 - x^2 + 2)$$

$$= x^5 - x^4 + 2x^2 + x^4 - x^3 + 2x + x^3 - x^2 + 2$$

$$= x^5 + x^2 + 2x + 2$$

القسمة على: $(x - \alpha)$

القسمة الاقليدية لحدودية على $x - \alpha$:

خاصية و تعريف:

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و α عددا حقيقيا.

توجد حدودية $Q(x)$, درجتها $n-1$ بحيث: $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$

الحدودية $Q(x)$ تسمى خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$.

العدد الحقيقي $P(\alpha)$ يسمى باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$.

مثال: لدينا $x^2 - 3 = (x - 2)(x + 2) + 1$ نقول في هذه الحالة , ان $x - 2$ هو خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x) = x^2 - 3$ على

$x + 2$ و 1 هو باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x + 2$.

جذر حدودية:

تعريف:

لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.

نقول أن α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان: $P(\alpha) = 0$.

α يسمى أيضا صفرا للحدودية $P(x)$.

تمرين : جمع و ضرب حدوديتين

أحسب مجموع و جذاء الحدوديتين التاليتين:

$$P(x) = -2x^3 + x^2 - 1 \quad , \quad Q(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$$

تمرين : التعرف على جذر حدودية

حدد من بين الأعداد التالية: $1; 2; 0; -1; -2$ جذور الحدودية $P(x)$ في الحالتين التاليتين:

$$1. \quad P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 14x - 8$$

$$2. \quad P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

تمرين : القسمة الاقليدية لحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$:

أنجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$ في الحالتين التاليتين:

$$1. \quad P(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{و} \quad D(x) = x + 3$$

$$2. \quad P(x) = 2x^4 + x^3 + x - \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad D(x) = x - \frac{1}{2}$$

أمثلة:

3- جذر للحدودية: $P(x) = x^2 + 2x - 3$ لأن $P(-3) = 0$.

1 جذر للحدودية $P(x)$ لأن $P(1) = 0$.

2 ليس جذرا للحدودية $P(x)$ لأن $P(2) = 5$.

α جذر للحدودية $P(x)$ يعني أن α حل للمعادلة $P(x) = 0$.

قابلية القسمة على $x - \alpha$:

تعريف:

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$ بحيث: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

خاصية:

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.
 $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا وفقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

برهان:

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n و α عددا حقيقيا , توجد حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$ بحيث: $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$
لدينا: α حذر للحدودية $P(x)$ تكافئ أن: $P(\alpha) = 0$
تكافئ أن: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$
تكافئ أن: $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$.

مثال:

3- جذر للحدودية: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ لأن $P(-3) = 0$
إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x + 3$, و منه توجد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x) = (x + 3)Q(x)$ لدينا $P(x)$ درجتها 3 و
 $R(x) = x + 3$ درجتها 1 إذن $Q(x)$ درجتها 2 و بالتالي $Q(x)$ تكتب على شكل: $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

تحديد $Q(x)$:

الطريقة 1:

لدينا: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ و $P(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$
يعني أن: $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$
 $= ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c$
 $= ax^3 + (b + 3a)x^2 + (c + 3b)x + 3c$
حسب خاصية تساوي حدوديتين لدينا:
 $a = 1$ و $b + 3a = 3$ و $c + 3b = -2$ و $3c = -6$
يعني أن: $a = 1$ و $b = 0$ و $c = -2$ إذن: $Q(x) = x^2 - 2$.

الطريقة 2:

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$
 $= x^2(x + 3) - 2(x + 3)$
 $= (x + 3)(x^2 - 2)$
و منه $Q(x) = x^2 - 2$

مراحل انجاز القسمة الاقليدية:

1. نضع مكان النقطة الحد المناسب بحيث اذا ضربناه في x نجد: x^3 هذا الحد هو x^2 (لأن $x^3 = x \cdot x^2$)
 2. نقوم بضرب x^2 في $x + 3$, فنحصل على $x^3 + 3x^2$ ثم نضع مقابل $x^3 + 3x^2$ أي $-x^3 - 3x^2$ تحت $P(x)$.
 3. نقوم بعملية الجمع بين $P(x)$ و $-x^3 - 3x^2$ نحصل على $2x^2 - 4x + 3$.
 4. نعيد نفس المراحل المتبعة في 1 و 2 و 3 مع $2x^2 - 4x + 3$ و $x + 3$. و نتوقف عن المراحل 1 و 2 و 3 عندما يكون الباقي عددا حقيقيا معلوما (ثابت).
- نعيد نفس الطريقة المتبعة في السؤال 1, لكن في السؤال الثاني نلاحظ أن $P(x)$ لا يحتوي على حد من الدرجة الثانية لذا وجب تعويضه ب $0 \cdot x^2$ لكي تتم العمليات عند وضع القسمة بشكل سليم و تجنب الأخطاء.

$$x^3 + 5x^2 - 4x + 3$$

$$-x^3 - 3x^2$$

$$2x^2 - 4x + 3$$

$$-2x^2 - 6x$$

$$-10x + 3$$

$$10x + 30$$

$$33$$

$$2x^4 + x^3 + 0x^2 + x - \frac{3}{4}$$

$$-2x^4 + x^3$$

$$2x^3 + 0x^2 + x - \frac{3}{4}$$

$$-2x^3 + x^2$$

$$x^2 + x - \frac{3}{4}$$

$$-x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$0$$

$$x + 3$$

$$x^2 + 2x - 10$$

$$x^3 + 5x^2 - 4x + 3$$

$$-x^3 - 3x^2$$

$$2x^2 - 4x + 3$$

$$x + 3$$

$$x^2$$

نتوقف و نكتب $P(x) = (x + 3)(x^2 + 2x - 10) + 33$

و نتأكد من أن $P(-3) = 33$

$$x - \frac{1}{2}$$

$$2x^3 + 2x^2 + x + \frac{3}{2}$$

إذن $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(2x^3 + 2x^2 + x + \frac{3}{2}\right)$ و نقول ان $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \frac{1}{2}$ (تأكد من $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$).

تمرين 1:

نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ و $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. أنجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x + 2$.

2. بين أن $Q(x)$ تقبل القسمة على $x - 3$.

3. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

تمرين 2:

نعتبر الحدودية $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$ المعرفة بما يلي:

1. تحقق من أن 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.
2. بين أنه إذا كانت α جذرا للحدودية $P(x)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$.
3. بين أن العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.
4. بانجاز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - 2$, حدد الحدودية $Q(x)$ حيث: $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
5. استنتج أن: $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
6. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون: $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$.
7. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.