

الترتيب في IR

1- الترتيب والعمليات

نشاط 1. قارن العددين : $2\sqrt{45}$ و $4\sqrt{10}$

2. ليكن x عدداً حقيقياً أكبر قطعاً من 10 بين أن : $1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} > 0.77$

تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين.

$a \leq b$ يعني $b - a \in \mathbb{R}^+$

$a < b$ يعني $b - a \in \mathbb{R}^{+*}$

خاصيات

لتكن a و b و c و d أعداداً حقيقية.

• $a \leq b$ يكافئ $a + c \leq b + c$

• إذا كان $(a \leq b \text{ و } c \leq d)$ فإن $a + c \leq b + d$

إذا كان $(a \leq b \text{ و } c < d)$ فإن $a + c < b + d$

- إذا كان $c > 0$ فإن : $a \leq b$ تكافئ $ac \leq bc$

إذا كان $c < 0$ فإن : $a \leq b$ تكافئ $ac \geq bc$

• إذا كان $(0 \leq a \leq b \text{ و } 0 \leq c \leq d)$ فإن $ac \leq bd$

- إذا كان $0 \leq a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$

إذا كان $a \leq b \leq 0$ فإن $a^2 \geq b^2$

- $0 \leq a \leq b$ تكافئ $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

خاصية

لكل عددين حقيقيين a و b غير منعدمين ولهما نفس الإشارة لدينا :

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ يكافئ } a \leq b$$

خاصية

- إذا كان $(a \leq b \text{ و } b \leq c)$ فإن $a \leq c$

- إذا كان $(a \leq b \text{ و } b < c)$ فإن $a < c$

التمرين 1

1. بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$

2. ليكن x عدداً حقيقياً بحيث $x \geq 5$.

بين باستعمال طريقتين مختلفتين أن : $x^2 - 2x + 4 \geq 19$

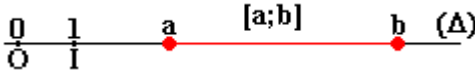
2- مجالات المجموعة IR

تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \leq b$.

الجال المغلق $[a; b]$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية x المحصورة بين a و b كما يلي: $a \leq x \leq b$

نكتب: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



تمثيل $[a; b]$ على المستقيم العددي $\Delta(O; I)$:

بنفس الطريقة نعرف المجالات الأخرى:

	$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} -$
	$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} -$
	$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} -$
	$] -\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} -$

أمثلة $3 \notin [2; 3[$ ؛ $2,5 \in [2; 3[$ ؛ $2 \in [2; 3[$

$$\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[\quad ; \quad \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

$$\mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[\quad ; \quad \mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$$

التمرين 2. 1. أتمم بأحد الرمزین $\in$ أو $\notin$:

$$-7.5 \dots \in]-7; +\infty[\quad ; \quad \sqrt{3} \dots \in]-\infty; 2] \quad ; \quad -1.5 \dots \in [-1; 5] \quad ; \quad 4 \dots \in [4; 8]$$

2. عبر عن هذه التفاوتات بمجالات:

$$x \leq 10 \quad ; \quad x > -3 \quad ; \quad 1 \leq x < 3 \quad ; \quad -2 \leq x \leq 5 \quad ; \quad 1 < x < 2$$

3- القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف

القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي العدد الذي يرمز له بالرمز $|x|$ والمعرفة كما يلي:

$$- \quad |x| = x \quad \text{إذا كان} \quad x \geq 0$$

$$- \quad |x| = -x \quad \text{إذا كان} \quad x \leq 0$$

$$\text{أمثلة} \quad |\sqrt{2} - \sqrt{7}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{7}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} \quad ; \quad |-100| = 100 \quad ; \quad |5| = 5$$

خاصية

لكل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad ; \quad |a|^2 = a^2 \quad ; \quad |-a| = |a|$$

خاصية

لكل عددين حقيقيين a و b :

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad ; \quad (b \neq 0) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad ; \quad |ab| = |a| \cdot |b|$$

خاصية

لتكن a و b و r أعدادا حقيقية حيث $r > 0$.

$$- \quad |a| = r \quad \text{يكافئ} \quad (a = -r \quad \text{أو} \quad a = r)$$

$$- \quad |a| = 0 \quad \text{يكافئ} \quad a = 0$$

$$- \quad |a| = |b| \quad \text{يكافئ} \quad (a = -b \quad \text{أو} \quad a = b)$$

التمرين 3

1. أكتب بدون القيمة المطلقة الأعداد التالية:

$$|10^{-2}| \quad ; \quad |\sqrt{2}-1| \quad ; \quad |\sqrt{3}-4| \quad ; \quad \left| \pi - \frac{22}{7} \right|$$

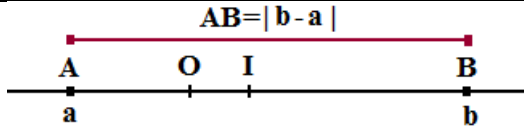
2. حل في IR المعادلات التالية:

$$|x-3| = |x+5| \quad ; \quad |2x+1| = 4 \quad ; \quad |x-7| = 0$$

4- المسافة بين نقطتين والقيمة المطلقة

خاصية

لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين على محور $\Delta(O;I)$ بحيث $OI = 1$ لدينا: $AB = |b-a|$



تعريف

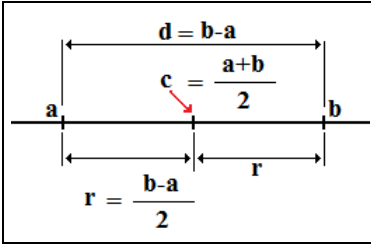
المسافة $|b-a|$ بين نقطتين $A(a)$ و $B(b)$ على محور $\Delta(O;I)$ بحيث $OI = 1$ تسمى أيضا المسافة بين العددين a و b .

أمثلة

- حدد الأعداد x التي مسافتها عن 3 هي 5.

- حدد هندسيا على المحور $\Delta(O;I)$ مجموعة النقط M ذات الأفصول x بحيث $|x-2| = |x+5|$.

5- مركز وسعة وشعاع مجال محدود



تعريف ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a \leq b$.

- مركز مجال طرفاه a و b هو $c = \frac{a+b}{2}$

- سعة مجال طرفاه a و b هي $d = b - a$

- شعاع مجال طرفاه a و b هو $r = \frac{d}{2} = \frac{b-a}{2}$

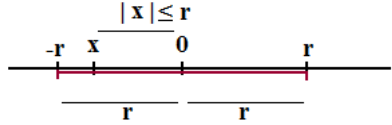
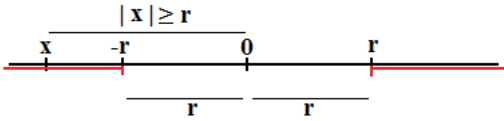
التمرين 4

1- حدد مركز وسعة وشعاع المجال $]-3;5]$.

2- حدد مجالا مفتوحا مركزه 2 - وشعاعه 3.

3- حدد مجالا مغلقا مركزه 1 وأحد طرفيه $-\frac{3}{2}$.

6- القيمة المطلقة والمجالات



مبرهنة 1

ليكن r عددا حقيقيا بحيث $r > 0$.

- $|x| \leq r$ يكافئ $-r \leq x \leq r$ يكافئ $x \in [-r; r]$

- $|x| < r$ يكافئ $-r < x < r$ يكافئ $x \in]-r; r[$

مبرهنة 2

ليكن r عددا حقيقيا بحيث $r > 0$.

- $|x| \geq r$ يكافئ $x \geq r$ أو $x \leq -r$ يكافئ $x \in]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[$

- $|x| < r$ يكافئ $x > r$ أو $x < -r$ يكافئ $x \in]-\infty; -r[\cup]r; +\infty[$

نتيجة

لتكن a و b و r أعدادا حقيقية بحيث $r > 0$.

- $|x - a| \leq r$ يكافئ $a - r \leq x \leq a + r$ يكافئ $x \in [a - r; a + r]$

- $|x - a| \geq r$ يكافئ $x \geq a + r$ أو $x \leq a - r$

يكافئ $x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$

هذه الخاصية تبقى صحيحة إذا عوضنا $\leq$ ب $<$.

حل في IR المتراجحات التالية:

التمرين 5

$$|x| \leq 3 ; |x| > 5 ; |x - 3| < 2 ; |x + 4| < 7 ; |x - 1| \geq 2$$

7- التأيير والتقريب

أ- التأيير

تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$.
تسمى كل متفاوتة من المتفاوتات المزدوجة $a \leq x < b$ و $a < x \leq b$ و $a \leq x \leq b$ و $a < x < b$ تأييرا للعدد x سعته $b - a$.

أمثلة

- $0 < \frac{2}{3} < 1$ تأيير للعدد $\frac{2}{3}$ سعته 1.
- $0,666 < \frac{2}{3} < 0,667$ تأيير للعدد $\frac{2}{3}$ سعته 10^{-3} .

التمرين 6

1- علما أن $3 < x < 5$ و $2 < y < 4$ أطر $x^2 + 3x - \frac{1}{y} - 5$.

2- ليكن $|x| < 1$ و $|y| < 1$

أ- أطر العدد $\frac{1}{x + y + xy + 4}$

ب- أطر العدد $(x+1)(y+1)$

ج- أنشر العدد $(x+1)(y+1)$ ثم استنتج تأييرا للعدد $\frac{1}{x + y + xy + 4}$

د- ماذا تستنتج؟

التمرين 7

1- حدد تأييرا للعدد $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ سعته $7 \cdot 10^{-3}$ علما أن $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

2- نعتبر $1,53 < x < 1,54$ و $-0,01 < y < 0,02$

حدد تأييرا للعدد xy سعته $6 \cdot 10^{-2}$.

ب- التقريب

تعريف

ليكن x و r عددين حقيقيين بحيث $r > 0$.
كل عدد حقيقي a يحقق $|x - a| \leq r$ أو $|x - a| < r$ يسمى قيمة مقربة (أو تقريب) للعدد x بالدقة r .

مثال: لدينا $\left| \frac{1}{3} - 0,33 \right| < 0,004$ إذن 0,33 تقريب للعدد $\frac{1}{3}$ بالدقة 4×10^{-3} .

($\left| \frac{1}{3} - 0,33 \right| = |0,333... - 0,33| = 0,003... < 0,004$)

التمرين 8 علما أن $2 < x < 3$ بين أن $\frac{5}{2}$ تقريب للعدد x بالدقة 0,5 .

خاصية

إذا كان $a \leq x \leq b$ فإن العدد $\frac{a+b}{2}$ هو قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.
ملاحظة: $\frac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a; b]$ و $\frac{b-a}{2}$ شعاعه.

تعليل:

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b & \text{ يكافئ } a - \frac{a+b}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq b - \frac{a+b}{2} \text{ يكافئ } \frac{a-b}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} \\ & \text{ يكافئ } \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \text{ يكافئ } -\frac{b-a}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

التمرين 9 علما أن $-7 < x < 10$ حدد أفضل تقريب للعدد x محدداً دقته.

ج- التقريبات العشرية

مثال: نعلم أن $\pi = 3,14159265\dots$ إذن $3,141 \leq \pi \leq 3,142$

نلاحظ أن سعة هذا التأطير هي $3,142 - 3,141 = 0,001 = 10^{-3}$ فنقول:

- $3,141$ هو التقريب العشري للعدد π من الرتبة 3 بتفريط. (نقول بتفريط لأن $3,141 \leq \pi$)
- $3,142$ يسمى التقريب العشري للعدد π من الرتبة 3 بإفراط. (نقول بإفراط لأن $3,142 \geq \pi$)

التمرين 10 ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث $1,24$ هو التقريب العشري لـ x من الرتبة 2 بتفريط و $-0,25 < y < -0,31$.

حدد تأطيراً للعدد $\frac{y}{x}$ سعته 0,05 .

اصطلاح:

التقريب العشري من الرتبة n الأكثر قرباً من العدد x يسمى الجبر (*arrondi*) للعدد x من الرتبة n . **مثال:**

لدينا $\frac{2}{3} = 0,666\dots$ أذن $\frac{2}{3} < 0,67 < \frac{2}{3}$ ومنه:

- العدد 0,66 هو التقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 2 بتفريط.

- العدد 0,67 هو التقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 2 بإفراط.

- الجبر للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 2 هو 0,67 .