

**الدرس 1 : مجموعة الأعداد الصحيحة
الطبيعية و مبادئ في الحسابيات**

عناصر التوجيهات التربوية	مكونات المقرر الرسمي
✓ يتم ادراج الرموز ، π ، $\square$ ، ϕ ، ϵ ، $\notin$ ، $\subset$ ، ✓ يهدف تناول "مبادئ في الحسابيات" إلى استئناس التلاميذ ببعض أنماط البرهنة من خلال استعمال الأعداد الزوجية و الأعداد الأولية دون افراط.	✓ الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية. ✓ مضاعفات عدد، المضاعف المشترك الأصغر لعددتين . ✓ قواسم عدد، القاسم المشترك الأكبر لعددتين. ✓ الأعداد الأولية، تفكيك عدد إلى عوامل أولية.

مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية ومبادئ في الحسابيات

تقديم: على الرغم من قدم الأبحاث ، من إقليدس مروراً بالخوارزمي ووصولاً إلى بيير دوفيرما، حول الأعداد الصحيحة الطبيعية وخصائصها وعلاقاتها، فإن هذه الأعداد مازالت حبلً بوضعيات مفتوحة واستعمالات هامة. وقد أكدت الأعداد الأولية والقسمية الإقليدية مكانتها بقوة في زمن ثورة المعلومات والأنترنت، حيث الحاجة إلى توظيف هذه الأعداد في التشفير و الترميز، ضماناً لأمن وفعالية البطائق الإلكترونية والمغناطيسية وحفاظاً على سرية المعلومات الشخصية.

1. مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية:

1) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية:

نشاط: من بين الأعداد التالية، حدد تلك التي تمثل أعداداً صحيحة طبيعية:

$$42.01, 131-(20-3), 17-23, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}, \sqrt{49} - \sqrt{25}, \frac{186}{3}, \sqrt{16}, \frac{7}{5}, 8$$

حل النشاط: $8, \sqrt{16}, 186=3 \times 62, \sqrt{49} - \sqrt{25} = 7 - 5, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, 131-(20-3)$

تعريف: الأعداد 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9... تسمى أعداداً صحيحة طبيعية و تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية نرسم لها ب IN ونكتب : $IN = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

أمثلة: 15، 1000، 1001، 100000 أعداد صحيحة طبيعية

الأعداد (-13) و $\sqrt{2}$ و $\frac{2}{5}$ و 0.18 ليست بأعداد صحيحة طبيعية،

نعتبر عن أن عدد صحيح طبيعي بالكتابة " $2 \in IN$ " ونقرأ "2 عنصر من IN" أو "2 ينتمي إلى IN"

نعتبر عن أن (-3) ليس عدداً صحيحاً طبيعياً بالكتابة " $-3 \notin IN$ " ونقرأ "3- ليس عنصر من IN" أو

"3- لا ينتمي إلى IN"

مصطلحات وترميز:

✓ العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي المنعدم.

✓ مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة نرسم لها بالرمز : $IN^* = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

تطبيق: أتمم بأحد الرمز $\in$ أو $\notin$: $\frac{24}{2} \in IN, 3 \in IN^*, 0 \notin IN^*, \sqrt{2} \notin IN^*, \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \in IN$

2) الأعداد الزوجية- الأعداد الفردية:

نشاط:

1- اعط كل الأعداد الزوجية المحصورة بين 41 و 65.

2- لنرسم لمجموعة الأعداد الزوجية ب P ومجموعة الأعداد الفردية ب I. أتمم بأحد الرمز $\in$ أو $\notin$:

$$I \dots 5, P \dots 0, I \dots 0, I \dots 4, P \dots 17 \times 4, P \dots 3 \times 2$$

3- ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين زوجيين و c و d عددين صحيحين طبيعيين فرديين.

حدد زوجية الأعداد التالية (هل الأعداد زوجية أم فردية) مع تعليل الجواب : $a+b, c+d, a+c$

الحل:

1- الأعداد الزوجية المحصورة بين 41 و 65 هي: 42 ، 44 ، 46 ، 48 ، 50 ، 52 ، 54 ، 56 ، 58 ، 60 ، 62 ، 64

$$(2) \quad 5 \cdot 13 \in I, \quad 0 \in P, \quad 0 \notin I, \quad 4 \cdot 17 \in I, \quad 4 \cdot 17 \notin P, \quad 2\sqrt{3} \notin P$$

(3) لدينا $a=2k$ و $b=2k'$ بحيث k و k' عددين طبيعيين، نضع: $k'' = k' + k$

إذن: $a+b=2k''$ أي $a+b$ عدد زوجي .

ولدينا: $c=2k+1$ و $d=2k'+1$

إذن: $c+d=2k+1+2k'+1=2k''+2=2(k''+1)$ أي أن $c+d$ عدد زوجي .

ولدينا $a+c=2k+2k'+1=2(k'') + 1$ أي أن $a+c$ عدد فردي.

تعريف:

✓ كل عدد صحيح طبيعي يكتب على شكل $2k$ ، حيث k عدد صحيح طبيعي يسمى عددا زوجيا .

✓ كل عدد صحيح طبيعي يكتب على شكل $2k+1$ ، حيث k عدد صحيح طبيعي يسمى عددا فرديا .

أمثلة: الأعداد 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 ... أعداد زوجية. الأعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ... أعداد فردية.

ملاحظات:

✓ كل عدد صحيح طبيعي هو إما عدد زوجي أو عدد فردي.

✓ مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي.

✓ مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي.

✓ مجموع عدد زوجي وعدد فردي هو عدد فردي.

تطبيق:

1- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا . أدرس زوجية كل من $n + (n + 1) + (n + 2)$ و $n + (n + 1)$ و $4n^2 + 4n + 1$

2- ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث: $m > n$ بين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية.

الحل:

(1)

✓ n و $n+1$ عددان صحيحان طبيعيين متتاليان ومنه أحدهما زوجي والآخر فردي، وبالتالي جداءهما زوجي إذن $n(n+1)$ زوجي.

✓ لدينا: $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$ وبالتالي زوجية $n+(n+1)+(n+2)$ هي زوجية $n+1$:

○ إذا كان n زوجيا فإن $n+(n+1)+(n+2)$ فرديا.

○ إذا كان n فرديا فإن $n+(n+1)+(n+2)$ زوجيا.

✓ لدينا $4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ وحيث $(2n^2 + 2n) \in \mathbb{N}$ فإن $4n^2 + 4n + 1$ فردي.

(2) العدد $(m-n)$ يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا .

✓ إذا كان $(m-n)$ فإنه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث: $m-n=2k$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة نحصل على $m+n=2k+2n=2(k+n)$

وحيث أن $k + n \in \mathbb{N}$ فإن $m+n$ زوجي.

✓ إذا كان $(m-n)$ فإنه يوجد k من IN حيث: $m-n=2k+1$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة نحصل على $m+n=2k+2n+1=2(k+n)+1$ وحيث أن $k+n \in IN$ فإن $m+n$ فرديا، إذن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية.
11. مضاعفات عدد- قواسم عدد

1- مضاعفات عدد:

1-1) أنشطة:

نشاط:1

1) ضع علامة x في المكان المناسب:

2210	211	999	121	33	75	50	24	
x						x	x	مضاعف 2
		x		x	x		x	مضاعف 3
x					x	x		مضاعف 5
			x	x				مضاعف 11

2) استخرج من بين أعداد السطر الأول المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 ثم 3 و 11.

الحل: 2) المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 : 24 ، المضاعفات المشتركة للعددين 3 و 11: 33

نشاط:2

حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 ثم للعدد 9 . استنتج المضاعفات المشتركة من بين هذه المضاعفات.

الحل: المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 هي: 6 ، 12 ، 18 ، 24 ، 30 ، 36 ، 42 ، 48 ، 54 ، 60

المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9 هي : 9 ، 18 ، 27 ، 36 ، 45 ، 54 ، 63 ، 72 ، 81 ، 90

المضاعفات المشتركة من بين هذه المضاعفات هي : 18 ، 36 ، 54

نشاط:3 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا.

أ- تأكد $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية: $n=1$ ، $n=3$ ، $n=5$ ، $n=7$.

ب- بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n .

الحل:

أ- $0=8*0$ ، $8=8*1$ ، $24=8*3$ ، $48=8*6$

ب- ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من IN حيث : $n=2k+1$

لدينا $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1)$ أي $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$ وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فإنه يوجد k' من IN حيث $k(k+1)=2k'$ وبالتالي $n^2 - 1 = 8k'$ إذن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 .

2-1) تعريف:

ليكن a و b عددين طبيعيين بحيث b غير منعدم . نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا كان: $a=bk$ حيث k عدد صحيح طبيعي.

أمثلة: الأعداد 0 و 3 و 6 و 9 و 1524 مضاعف للعدد 3 . العدد 15 ليس مضاعف للعدد 6.

(3-1) إضافات:

- ليكن $b \in \mathbb{N}^*$ ، مضاعفات b هي الأعداد kb حيث $k \in \mathbb{N}$
- $0 \cdot k = 0$
- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ما لنهاية من المضاعفات.
- للعدد 0 مضاعف وحيد هو 0.

(4-1) المضاعف المشترك الأصغر:

تعريف: ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين . المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر مضاعف مشترك غير منعد للعددين a و b ونرمز له بالرمز : $\text{PPCM}(a,b)$ أو $a \vee b$

أمثلة: $\text{PPCM}(4,9)=36$ ، $\text{PPCM}(6,10)=30$

طريقة: (لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b حيث: $a \geq b$)

أحدد مضاعفات a ثم أتأكد بالتتابع ابتداء من أصغر مضاعف غير منعدم للعدد a . هل هو مضاعف للعدد b فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث إن كان نعم ، أتوقف والعدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

مثال: المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6 و 10 هو 30 (10:20:30)

2- قواسم عدد:

(1-2) نشاط:

حدد قواسم 90 ثم قواسم 126 ، ثم استنتج أكبر قاسم مشترك للعددين 90 و 126.

تذكير: لكي نحدد مثلا قواسم العدد 120 ننجز القسومات المتتالية للعدد 120 على الأعداد الصحيحة الطبيعية المتتالية انطلاقا من 1 ، ونحتفظ بالمقسوم عليه والخارج ، كلما كان هذا الأخير ينتمي إلى $\mathbb{N}$ ونتوقف عند أول خارج أصغر قطعا من المقسوم عليه نلاحظ أننا نحصل في كل مرة على قاسمين a و b يحققان $ab=120$.

حل النشاط:

قواسم العدد 90 هي: 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 9 ، 10 ، 15 ، 18 ، 30 ، 45 ، 90

قواسم العدد 126 هي: 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 9 ، 14 ، 18 ، 63 ، 126.

أكبر قاسم مشترك للعددين 90 و 126 هو 18.

(2-2) تعريف: ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم. نقول إن العدد b قاسم للعدد a إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث: $a = bk$.

ملاحظات:

- العدد b قاسم للعدد a إذا كان a مضاعف للعدد b . نقول أيضا العدد a قابل للقسمة على b .
- كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم مخالف ل 1 له على الأقل قاسمان 1 ونفسه.
- للعدد 1 قاسم وحيد هو نفسه.
- جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة تقسم 1.

2-3) مصاديق قابلية القسمة على: 2، 3، 4، 5، 9:

خاصية: ليكن n عددا صحيحا طبيعيا، يكون العدد n قابلا للقسمة:

على 2: إذا كان رقم وحداته هو: 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8.

على 3: إذا كان مجموع أرقامه مضاعف للعدد 3.

على 4: إذا كان رقم وحداته ورقم عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا مضاعفا للعدد 4.

على 5: إذا كان رقم وحداته هو 0 أو 5.

على 9: إذا كان مجموع أرقامه مضاعف للعدد 9.

أمثلة:

- العدد 4725 يقبل القسمة على 5 لأن رقم وحداته هو 5.
- العدد 4725 يقبل القسمة على 3 و 9 لأن العدد $18=4+7+2+5$ مضاعف للعدد 3 ومضاعف للعدد 9 .
- العدد 1628 مضاعف للعدد 2 لأن رقم وحداته ورقم عشراته يكونان في هذا الترتيب العدد 28 وهو مضاعف للعدد 4.

2-4) القاسم المشترك الأكبر لعددين:

تعريف: ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك لهما، نرمز له بالرمز $PGCD(a; b)$ أو $a \wedge b$

مثال: $PGCD(126; 90)=18$ $PGCD(4; 9)=1$

2-5) طريقة لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b (حيث $a \geq b$)

أحدد قواسم العدد b ثم أتأكد بالتتابع تناقصا ابتداء من أكبر قاسم للعدد b هل هو قاسم للعدد a ، فإذا كان الجواب لا، أتابع البحث ان كان نعم ، أتوقف والعدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو القاسم المشترك للعددين a و b .

مثال: القاسم المشترك الأكبر للعددين 90 و 126 هو 18 (90،45،30،18).

III. الأعداد الأولية les nombres premiers

1) تعريف: نسمي عددا أوليا كل عدد صحيح طبيعي a يقبل قاسمين فقط هما العدد 1 و العدد a .

مثال: الأعداد الأولية الأصغر من 40 هي: 2، 3، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37.

2) التفكير إلى جداء عوامل أولية لعدد غير أولي:

خاصية: نقبل أن كل عدد صحيح طبيعي n غير منعدم ويخالف 1 ($n \geq 2$) يكتب على شكل جداء عوامل أولية.

أمثلة:

- 41 عدد أولي.
- 72 عدد غير أولي و $72 = 8 * 9 = 2^3 * 3^2$

تعريف:

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا غير أولي. كتابة a ، على شكل جداء عوامل أولية، تسمى التفكير إلى جداء عوامل أولية للعدد .

أمثلة: فكك الأعداد 24، 319، 1344 إلى جداء عوامل أولية:

$$1344 = 4 * 4 * 4 * 21 = 2^6 * 3 * 7 \quad \text{و} \quad 319 = 11 * 29 \quad \text{و} \quad 24 = 8 * 3 = 2^3 * 3$$

تقنية التفكيك (نقلها)

لتفكيك عدد صحيح طبيعي غير منعدم a ، نأخذ أصغر عدد أولي يقسم a وننجز القسمة فنحصل على عدد b خارج القسمة فنأخذ أصغر عدد أولي يقسم b فنحصل على خارج القسمة... ونتابع على هذا المنوال حتى نحصل على خارج يساوي 1، العدد a سيكون جداء جميع الأعداد الأولية التي قسمنا بها.

مثال:

136	2
68	2
34	2
17	17
1	
$136 = 2^3 * 17$	

(3) خاصيات: (نقلها)

خاصية 1: المضاعف المشترك الأصغر لعددتين هو جداء العوامل الأولية المشتركة و الغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية، مرفوعة إلى أكبر أس.

خاصية 2: القاسم المشترك الأكبر لعددتين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية المرفوعة إلى أصغر أس.

ملاحظات:

$$a \wedge 1 = 1, a \wedge a = a, a \vee 1 = a, a \vee a = a$$

إضافة: طريقة لتحديد ما إن كان عددا أوليا أم لا

هل العدد a عدد أولي؟

نبدأ أولا بتحديد جميع الأعداد الأولية d التي تحقق $d^2 \leq a$. إذا كان a يقبل القسمة على أحد هذه الأعداد فإن a ليس أوليا ، وإذا كان a لا يقبل القسمة على أي هذه الأعداد فإن a عدد أولي.

مثال:

- 49 عدد غير أولي لأنه يقبل القسمة على 7.
- 239: لدينا الأعداد الأولية 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17 لا تقسم العدد 239 و $13^2 < 239 < 17^2$ إذن العدد 239 أولي.

غريال إيراتوستين: Crible d'ERATHOSTENE

حدد الأعداد الأولية الأصغر من 50 .

نكتب الأعداد 2 إلى 50 في جدول. العدد 2 عدد أولي وكل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية نشطب عليها. العدد 3 عدد أولي وكل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية نشطب على ما بقي لم يشطب عليه منها. العدد 5 عدد أولي وكل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية نشطب على ما تبقى منها. العدد 7 عدد أولي وكل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية، نشطب على ما تبقى منها. العدد 11 عدد أولي لا يمكن أن يكون أن يكون قاسما لأي من الأعداد التي لم يشطب عليها لأن $11^2 > 50$ إذن كل الأعداد التي لم يشطب عليها في هذا الجدول أعداد أولية.

الأعداد الأولية الأصغر من 50 هي: 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41، 43، 47

هذه الطريقة تسمى غريال إيراتوستين.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50						