

المادة: الرياضيات

درس رقم 5/

الأستاذ: نجيب عثمانى

ملخص لدرس المتتاليات العددية

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا (علوم تجريبية)

I. عموميات حول المتتاليات العددية

ليكن n_0 عددا صحيحا طبيعيا معلوما , نعتبر الجزء I من $\mathbb{N}$ بحيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

1. تعاريف و اصطلاحات ورموز

تعريف

كل دالة عددية u معرفة على I تسمى متتالية عددية

اصطلاحات ورموز

 u متتالية عددية معرفة على I

- لكل n_0 من I نرسم للعدد $u(n)$ بالرمز u_n
- نرمز للمتتالية العددية u بالرمز $(u_n)_{n \in I}$ أو $(u_n)_{n \geq n_0}$
- العدد u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ذا المدل n
- العدد u_{n_0} يسمى الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

2. متتاليات معرفة بالصيغة الصريحة لحددها العام

مثال :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{2}{n}$

- أحسب حدها الأول u_1
- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

3. متتاليات معرفة بعلاقة تررجعية

مثال :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

II. المتتاليات المكبورة و المصغورة و المحدودة

تعريف

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية

- نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ مكبورة إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$
- نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ مصغورة إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$
- نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة مصغورة .

III. رتبة متتالية :

تعريف

لنكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية

- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية إذا وفقط إذا كان : $\forall m \in I \text{ و } \forall n \in I \quad n > m \Rightarrow u_n \geq u_m$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية قطعاً إذا وفقط إذا كان : $\forall m \in I \text{ و } \forall n \in I \quad n > m \Rightarrow u_n > u_m$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية إذا وفقط إذا كان : $\forall m \in I \text{ و } \forall n \in I \quad n > m \Rightarrow u_n \leq u_m$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية قطعاً إذا وفقط إذا كان : $\forall m \in I \text{ و } \forall n \in I \quad n > m \Rightarrow u_n < u_m$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان : $\forall m \in I \text{ و } \forall n \in I \quad u_n = u_m$

خاصية

لنكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية

- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية قطعاً إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in I \quad u_{n+1} > u_n$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية قطعاً إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in I \quad u_{n+1} < u_n$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

IV. المتتاليات الحسابية

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$
العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} فان : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان : $u_n = u_p + (n - p)r$ لكل $n \geq n_0$ و $p \geq n_0$

3. مجموع حدود متتالية حسابية :

لنكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ حيث $n > p \geq n_0$

$$\text{لدينا } S_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_n + u_p}{2} \right)$$

المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ يحتوي على $(n - p + 1)$ حد

ملاحظة :

$$\bullet \text{ إذا كانت } (u_n) \text{ متتالية حسابية فان : } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$\bullet \text{ إذا كانت } (u_n) \text{ متتالية حسابية فان : } S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$$

V. المتتاليات الهندسية

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_{n_0} فان : $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان : $u_n = u_m q^{n-m}$ لكل $n \geq n_0$ و $m \geq n_0$

3. مجموع حدود متتالية لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ حيث $n > p \geq n_0$ لدينا :

- إذا كان $q \neq 1$ فان : $S_n = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$

- إذا كان $q = 1$ فان : $S_n = (n - p + 1) \times u_p$

حالة خاصة : إذا كان $q \neq 1$ فان :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{لأنه مجموع } (n+1) \text{ حد لمتتالية هندسية أساسها } q$$