

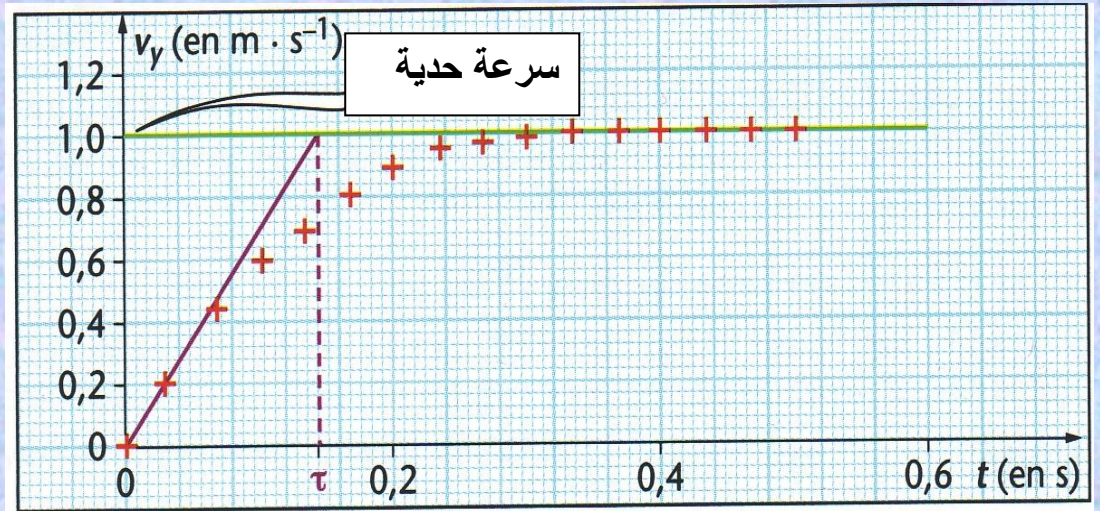
السقوط الرأسي لجسم صلب في مائع



1 (السقوط الرأسي باحتكاك .

1-1 (دراسة تجريبية .

لنعتبر المثال البسيط لسقوط كرية فولاذية في سائل لزج (زيت ، غليسيرول) . الأدوات و الوسائل المعلوماتية الخاصة بالتسجيل و المعالجة ، تمكن من استثمار الصور الملتقطة للظاهرة . حيث نحصل على المبيان الممثل لتغيرات سرعة مركز قصور الكرية بدلالة الزمن $v = f(t)$:



يبين هذا المنحنى وجود نظامين :

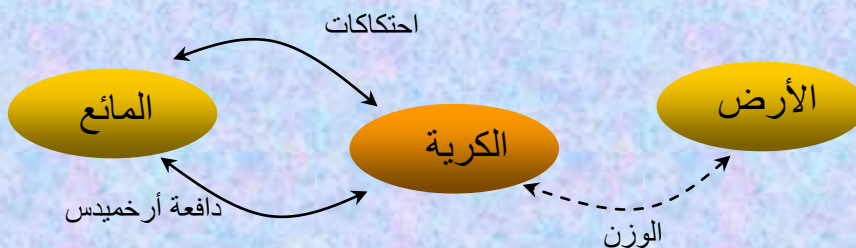
- نظام بدئي أو نظام انتقالي ، خلاله تزداد السرعة بينما يتناقص التسارع . خلال هذه المرحلة حركة الكرية حركة متسارعة .
- نظام تقاربي أو نظام دائم ، خلاله السرعة تبقى ثابتة ، الكرية وصلت إلى سرعة حدية . خلال هذه المرحلة حركة الكرية حركة منتظمة .

الزمن المميز τ للسقوط هو الزمن الذي يوافق مرور حركة الكرية من نظام إلى آخر . نعرفه بكونه أفصول نقطة تقاطع المقارب مع مماس المنحنى عند الأصل .

1-2 (دراسة نظرية .

* جرد القوى المطبقة على الجسم .

لكي نمذج هذا السقوط ، نذكر أولا بمميزات القوى المطبقة على الكرية .



الوزن :

الوزن أو قوة الثقالة هي القوة التي تنمدج تأثير الأرض على هذا الجسم . إنها قوة رأسية ، موجهة نحو الأسفل . في مكان معين ، قيمته تتناسب اطرادا مع الكتلة m :

$$P = mxg = \rho.V.g$$

P الوزن بوحدة النيوتن (N)

m كتلة الجسم بوحدة الكيلوغرام (kg)

g شدة مجال الثقالة بالنيوتن على الكيلوغرام ($N.kg^{-1}$)

ρ الكتلة الحجمية للجسم بوحدة الكيلوغرام على المتر مكعب ($kg.m^{-3}$)

V حجم الجسم بالمتر مكعب (m^{-3})

دافعة أرخميدس :

الجسم المغمور في مائع يتلقى من طرف هذا الأخير تأثيرا ميكانيكيا يسمى دافعة أرخميدس . ننمدج هذا التأثير بقوة رأسية ، موجهة نحو الأعلى . قيمتها تساوي وزن المائع المزاح .

$$F = \rho_{\text{fluide}} . V . g$$

F شدة دافعة أرخميدس بالنيوتن (N)

ρ_{fluide} الكتلة الحجمية للمائع بوحدة الكيلوغرام على المتر مكعب ($kg.m^{-3}$)

V حجم الجسم المغمور بالمتر مكعب (m^{-3})

g شدة مجال الثقالة بالنيوتن على الكيلوغرام ($N.kg^{-1}$)

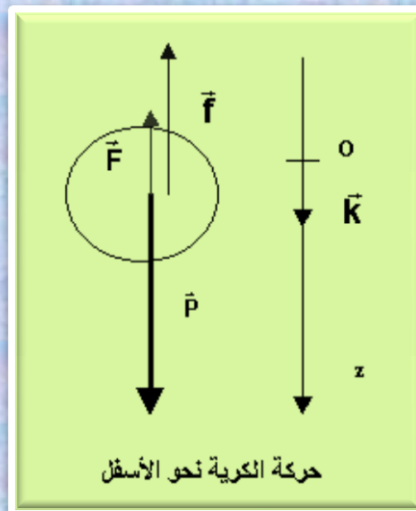
قوة الاحتكاك :

عندما يتحرك جسم صلب في مائع فإنه يتلقى قوى موزعة على سطحه تتعلق بطبيعة المائع ، شكل الجسم الصلب و خشونة السطح . شدة هذه القوى تزداد مع تزايد سرعة الجسم الصلب .

ففي حالة كرية في سقوط رأسي ، المجموع المتجهي لهذه القوى يكافئ قوة رأسية ، منحاهها معاكس لمنحى الحركة : تسمى الاحتكاك المائع .

تعبيرها بدلالة السرعة تعبير معقد ، إلا في حالتين :

- حالة السرعات المنخفضة (تدفق انسيابي) ، شدة قوة الاحتكاك تتناسب مع السرعة : $f = k.v$
 - حالة السرعات المرتفعة (تدفق مضطرب) ، شدة قوة الاحتكاك تتناسب مع مربع السرعة : $f = k'.v^2$
- في الحالتين منحى قوة الاحتكاك $\vec{f}$ معاكس لمنحى متجهة السرعة $\vec{v}$



* تطبيق القانون الثاني لنيوتن .

الكرية المدروسة خاضعة للقوى الثلاث السابقة :

- الوزن $\vec{P}$
- $\vec{F}$
- $\vec{f} = -k\vec{v}$ قوة الاحتكاك ، حيث نعتبرها تتناسب مع السرعة لأن سرعة السقوط ضعيفة .

ندرس الحركة في المرجع الأرضي و الذي نعتبره غاليليا (حيث أن مدة السقوط قصيرة) .

تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$$

نختار محورا (Oz) موجهها نحو الأسفل . بما أن $\vec{F}$ و $\vec{f}$ موجّهين نحو الأعلى (عكس منحنى المحور) ، فإن العلاقة المتجهية السابقة

$$m \frac{dv_z}{dt} = mg - \rho_{\text{fluide}} V g - k v_z(t)$$

تصبح :

و منه نجد (بعد القسمة على m) :

$$\frac{dv_z}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}} V}{m} \right) - \frac{k}{m} v_z(t)$$

و هي المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز قصور الكرة

مفهوم السرعة الحدية

عندما تصل الكرة إلى سرعتها الحدية ، فإن سرعة السقوط تبقى ثابتة ، أي $\frac{dv_z}{dt} = 0$ و بذلك فإن المعادلة التفاضلية في هذه الحالة

هي :

$$g \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}} V}{m} \right) - \frac{k}{m} v_{z,\text{lim}}(t) = 0$$

نستنتج أن :

$$v_{z,\text{lim}} = \frac{g}{k} (m - \rho_{\text{fluide}} V)$$

يمكن أن نكتب هذه المتساوية على الشكل :

$$v_{z,\text{lim}} = \frac{g}{k} (\rho_{\text{bille}} - \rho_{\text{fluide}}) V$$

هذا التعبير يبيّن أن السرعة الحدية تزداد عندما :

- تزداد الكتلة الحجمية للكرة
- تنقص الكتلة الحجمية للمائع

* حل المعادلة التفاضلية باستعمال طريقة أولير .

يمكن طريقة أولير من الحصول على حل تقريبي للمعادلة التفاضلية ، حيث تستعمل التقريب التالي في حالة Δt صغيرة :

$$v_z(t_{n+1}) = v_z(t_n) + \left(\frac{dv_z}{dt} \right)_{t=t_n} \times \Delta t$$

Δt تسمى خطوة أولير .

يمكن للمعادلة التفاضلية السابقة أن نكتب على الشكل :

$$\frac{dv_z}{dt} = A - B v_z(t)$$

مع A و B ثوابت

علاقة أولير تصبح :

$$v_z(t_{n+1}) = v_z(t_n) + (A - B v_z(t_n)) \times \Delta t$$

بمعرفة السرعة عند اللحظة $t_0 = 0$ (في هذه الحالة $v_z(0) = 0$) يمكن حساب السرعة عند اللحظة t_1 مع $t_1 = t_0 + \Delta t$ ،

و هكذا دواليك خطوة خطوة في لحظات متتالية تفصل بينها المدة Δt يمكن تمثيل المنحنى $v_z = f(t)$.

تحل المعادلة التفاضلية خطوة خطوة بتكرار نفس طريقة الحساب : إنها طريقة رقمية تكرارية .

هذه الطريقة تستند على تقريب . النتيجة تكون أكثر دقة كلما كانت خطوة الحساب Δt صغيرة . في حالة السقوط في مائع ، نعتبر أن

النتيجة صحيحة عندما تكون خطوة الحساب أصغر بكثير من الزمن المميز τ : $\Delta t \ll \tau$

صلاحية النموذج

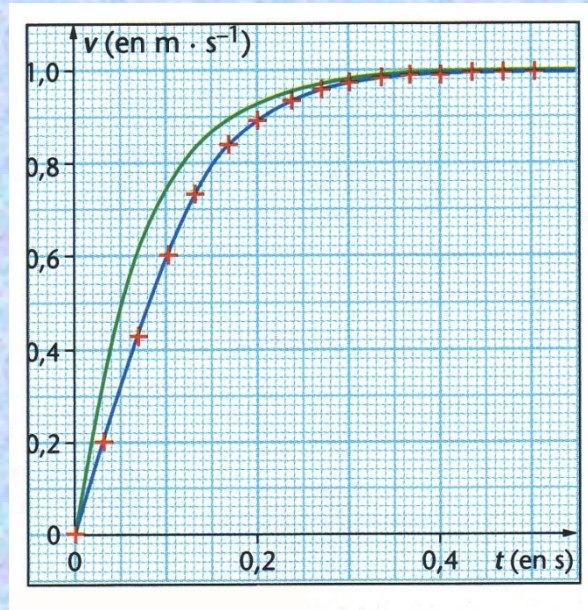
لمعرفة النموذج الصحيح لقوة الاحتكاك ($f = k v$ أو $f = k' v^2$) ، نقرن بين النتائج المحصل عليها اعتمادا على طريقة أولير و

تعبير f الذي تم اختياره مع النتائج التجريبية .:

- النظام الدائم الذي يعطي السرعة الحدية يمكن من حساب قيمة المعامل k

- إذا كان هناك تطابق بين المنحنى التجريبي و منحنى أولير خلال النظام الانتقالي ، النموذج الذي تم اختياره نمودجا صحيحا .

أما في حالة عدم التطابق ، فيجب طرح تعبير آخر ل f ثم إعادة الحساب .



1-3) المقادير المميزة للحركة .

* السرعة الحدية $v_{\text{lim}} = v_\ell$:

مبيانيا نحددها باستغلال المنحنى $v = f(t)$ (مخطط السرعة)

نظريا نحدده باستغلال المعادلة التفاضلية في النظام الدائم ،

حيث نعتبر $v = v_{\text{lim}} = \text{Cte}$ فنجد :

- في حالة $f = kv$:
$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{bille}}} \right)$$

- في حالة $f = k'v^2$:
$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{bille}}} \right)}$$

* التسارع البدني a_0 :

مبيانيا نحدده باعتباره يساوي ميل مماس المنحنى $v = f(t)$ عند أصل التواريخ : $a_0 = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$

نظريا نحدده بمعرفة السرعة البدئية v_0 و استغلال المعادلة التفاضلية ، مثلا في حالة $v_0 = 0$ نجد : $a_0 = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{bille}}} \right)$

* الزمن المميز τ :

مبيانيا نحدد باعتباره يمثل أفصول نقطة تقاطع مماس المنحنى $v = f(t)$ عند أصل التواريخ مع المقارب .

نظريا نحدده باعتبار العلاقة : $\tau = \frac{v_{\text{lim}}}{a_0}$.

2) السقوط الحر .

2-1) تعريف :

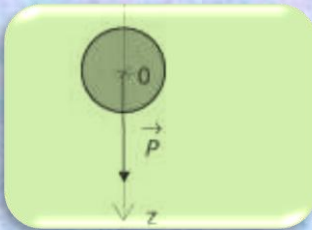
نقول إن جسما صلبا في سقوط حر عندما يكون خاضعا لوزنه فقط

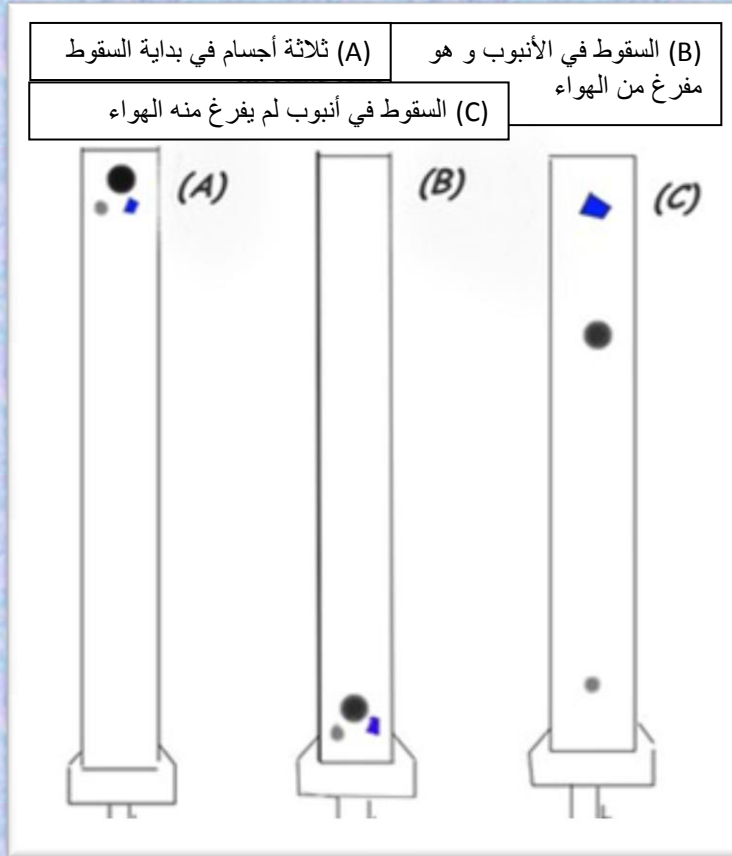
* ملحوظة .

بشكل أدق ، دراسة السقوط الحر لا تتحقق إلا في الفراغ . في الهواء ، نعتبر أن السقوط حرا عندما يمكن إهمال تأثير الهواء على الجسم .

لذا نختار جسما يتميز ب :

- كتلته الحجمية أكبر بكثير من الكتلة الحجمية للهواء ، بحيث يمكن إهمال دافعة أرخميدس أمام وزن الجسم .
- ذي شكل انسيابي (أيروديناميكي) مثلا كروي ، لكي نهمل قيمة قوة الاحتكاك مقارنة مع وزن الجسم .

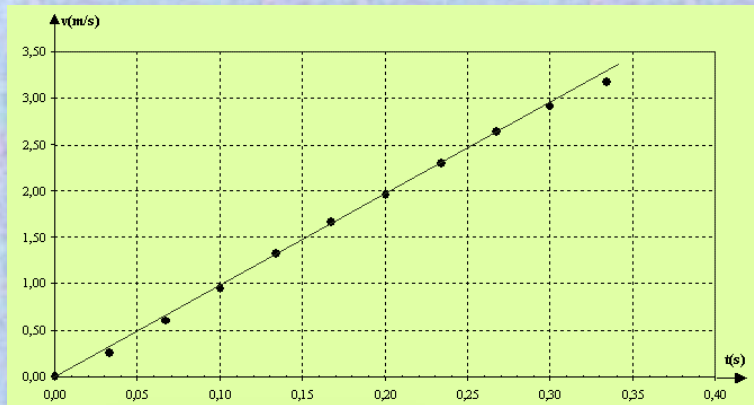




2-2 (دراسة تجريبية .

خلال السقوط الحر في الهواء لكرة فولاذية بدون سرعة بدئية ، نستعمل آلة تصوير رقمية و عدة معلوماتية ملائمة لتحديد مواضع مراكز قصور الكرة و سرعتها . فنحصل على المنحنى الممثل لتغيرات السرعة بدلالة الزمن $v = f(t)$ (انظر المبيان أسفله)

مخطط السرعة اذن مستقيم يمر من أصل المعلم ، مما يدل على التسارع ثابت . و بذلك فإن الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .
مبيانيا قيمة التسارع تساوي ميل المستقيم .



3-2 (المعادلة التفاضلية للحركة .

تخضع الكرة خلال سقوطها لوزنها فقط : $\vec{P} = m\vec{g}$ و بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب :

$$\vec{P} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

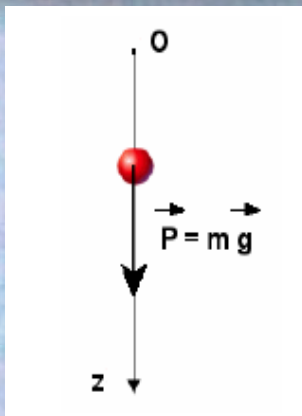
نسقط هذه العلاقة على محور (Oz) موجه نحو الأسفل :

$$a_z = g$$

قيمة التسارع لا تتعلق بكتلة الجسم . و بذلك فإن كريات مختلفة الكتلة لها نفس متجهة التسارع خلال سقوطها الحر ، و سواء كان هذا السقوط بسرعة بدئية أو بدون سرعة بدئية .

بما أن g ثابتة في مكان معيّن ، فإن التسارع ثابت ، نستنتج أن الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، معادلتها التفاضلية هي :

$$\frac{dv_z}{dt} = g$$



2-4) المعادلات الزمنية .
حل المعادلة التفاضلية في الميكانيك يؤدي إلى الحصول على المعادلات الزمنية للحركة .
باعتداد محور رأسي (OZ) موجه نحو الأسفل نجد :

$a = g$	التسارع
$v = gt + v_0$	السرعة
$z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$	الموضع