



الاشتقاق - Dérivabilité

I. قابلية الاشتقاق :

1. قابلية الاشتقاق في نقطة :

f دالة معرفة على مجال مركزه x_0 . f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي A بحيث : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ ونكتب $f'(x_0) = A$ ويسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 .

2. قابلية الاشتقاق على اليمين :

f دالة معرفة على مجال $[x; x_0 + \alpha[$. f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذا كانت للدالة نهاية منتهية على يمين x_0 ويرمز لها بالرمز $f'_d(x_0)$.

3. قابلية الاشتقاق على اليسار :

f دالة معرفة على مجال $]x_0 - \alpha; x_0]$. f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كانت الدالة تقبل نهاية على يسار x_0 ويرمز لها بالرمز $f'_g(x_0)$.

4. قابلية الاشتقاق على مجال :

f دالة معرفة على مجال I .

f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على جميع نقط I

f قابلة للاشتقاق على $[a; b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a; b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .

II. ملاحظة : تكون f قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 إذا كانت قابلة للاشتقاق على يمين x_0 وعلى

يسار x_0 وكان لدينا : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

III. التأويل الهندسي للعدد المشتق :

الدالة المعرفة بما يلي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التاليفية المماسية ل C_f بجوار x_0 .

المستقيم ذو المعادلة : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يسمى مستقيم مماس للمنحنى C_f عند النقطة $A(x; f(x_0))$. العدد $f'(x_0)$ يسمى المعامل الموجه أو العدد المشتق .

IV. الاشتقاق والاتصال :

كل دالة قابلة للاشتقاق في نقطة هي دالة متصلة والعكس غير صحيح بصفة عامة .

V. الكتابة التفاضلية :

إذا كان $y = f(x)$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I فإننا نكتب اصطلاحاً $dy = f'(x)dx$ أو $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ هذه الكتابة تسمى الكتابة التفاضلية .

VI. مشتقة مركب دالتين :

1. f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فان الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 و $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$

2. f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فان الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على المجال I و $(\forall x \in I)(g \circ f)'(x) = (g' \circ f(x)) \times f'(x)$

VII. مشتقة الدالة العكسية :

(1) f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فان الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$

$$\text{ولدينا : } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(2) f قابلة للاشتقاق على المجال I و $f'(x) \neq 0$ لكل x من المجال I فان f^{-1} قابلة

$$\text{للاشتقاق على المجال } f(I) \text{ . } (\forall y \in f(I)); (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} .$$

الدالة f	الدالة f مشتقاتها
$f + g$	$f' + g'$
kf	kf'
$f \times g$	$f'g + fg'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
$\frac{1}{g}$	$\frac{g'}{g^2}$
$\sqrt{f}; f > 0$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f^n; (n \in \mathbb{N}^*)$	$nf'f^{n-1}$
a	0
x	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt[n]{f}$	$\frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$a f'(ax+b)$	$f(ax+b)$
$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$a \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

VIII. المشتقة ومنحنى التغيرات :

f قابلة للاشتقاق على مجال I ومشتقتها هي $f'(x)$:

1. إذا كان $f'(x) > 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة تزايدية .
2. إذا كان $f'(x) < 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة تناقصية .
3. إذا كان $f'(x) = 0$ ($\forall x \in I$) فإن f دالة ثابتة .

IX. تحذب .تقعر .نقطة انعطاف :

f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ($f''(x)$)

1. إذا كان $f''(x) > 0$ على المجال I فإن (C_f) منحنى محدب .
 2. إذا كان $f''(x) < 0$ على المجال I فإن (C_f) منحنى مقعر .
 3. إذا كان $f''(x) = 0$ على المجال I فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف .
- + إذا انعدمت f' في x_0 وغيرت إشارتها بجوار x_0 نتكلم عن مطراف دالة (قيمة قصوى أو قيمة دنيا) .

+ إذا انعدمت f'' في x_0 وغيرت إشارتها بجوار x_0 نتكلم عن نقطة انعطاف .

❖ محور تماثل/ مركز تماثل:

f . دالة معرفة على D_f و (C) م.م.م .

1. المستقيم $x = a$ محور تماثل المنحنى اذا تحقق : $f(2a-x) = f(x)$.
2. النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل المنحنى اذا تحقق : $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

❖ دالة دورية :

f . دالة عددية و D_f حيز تعريفها . f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T بحيث :

$$f(x+T) = f(x); (x-T) \in D_f; (x+T) \in D_f; \forall x \in D_f$$

العدد T يسمى دور الدالة f واصغر دور موجب يسمى دور الدالة f .