

ملخص لدرس: المسار المتجهي

في المستوى

مستوى الجذع مشترك علمي

I. متجهات المستوى: (تذكير)

عناصر متجهة:

A و B نقطتان مختلفتان. إذا رمزنا لمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان:
اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم (AB) .

منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A إلى B .

منظم $\vec{u}$ هو المسافة AB , و نكتب: $\|\vec{u}\| = AB$

حالة خاصة:

المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم, و تسمى المتجهة المنعدم, و تكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
خاصية:

$\vec{u}$ متجهة و A نقطة من المستوى, توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

تساوي متجهتين:

تعريف:

نقول إن متجهتين متساويتين إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم.

خاصية:

ليكن $ABCD$ رباعيا. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ تكافئ $ABCD$ متوازي أضلاع.

مثال: في الشكل جانبه لدينا (ℓ) دائرة و $[AB]$ و $[CD]$ قطران لها.

بما أن O مركز الدائرة (ℓ) فان O منتصف القطرين $[AB]$ و $[CD]$.

و بالتالي $ACBD$ متوازي الأضلاع, و منه $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$

مجموع متجهتين:

علاقة شال: A و B نقطتان من المستوى. لكل نقطة C من المستوى. لدينا: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

قاعدة متوازي الأضلاع لإنشاء مجموع متجهتين:

O و A و B ثلاث نقط غير مستقيمية.

مجموع المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ هو المتجهة $\overrightarrow{OC}$ بحيث يكون الرباعي $OACB$ متوازي الأضلاع.

مقابل متجهة:

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة.

مقابلة المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحناها عكس منحى المتجهة $\vec{u}$, و يرمز لها بالرمز $-\vec{u}$.

II. ضرب متجهة في عدد حقيقي:

تعريف:

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عددا حقيقيا غير منعدم. ضرب المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز $k \cdot \vec{u}$.

أو $k\vec{u}$ و المعرفة كما يلي:

لها نفس اتجاه المتجهة $\vec{u}$.

لها نفس منحنى المتجهة $\vec{u}$ في حالة: $k > 0$ و لها منحنى معاكس للمتجهة $\vec{u}$ في حالة: $k < 0$.
منظمها يساوي $\|\vec{u}\| \times |k|$.

خاصيات:

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و لكل عددين حقيقيين k و k' لدينا:
 $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
 $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
 $k\vec{u} = \vec{0}$ تكافئ $k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$.
 $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ و $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

أمثلة:

$$2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$5\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \left(5 - \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ تكافئ أن } \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ أي أن: } A = B$$

$$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$$

انتبه: الكتابة $\overrightarrow{AB} \cdot 2$ غير صحيحة.

استقامية متجهتين-استقامية ثلاث نقط:

تعريف:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.
 $\vec{v} = k\vec{u}$ و $\vec{u}$ مستقيمتان إذا وجد عدد حقيقي k غير منعدم حيث:
المتجهة المنعدمة مستقيمة مع جميع المتجهات.

خاصية:

لتكن A و B و C و D أربع نقط حيث $A \neq B$ و $C \neq D$.
 $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيمتان إذا و فقط إذا كان (AB) و (CD) متوازيين.

خاصية:

تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا و فقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيمتين.
مثال: في كل شبه منحرف $ABCD$ قاعدته $[AB]$ و $[CD]$.

لدينا المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيمتان.

III. منتصف قطعة:

تعريف:

لتكن $[AB]$ قطعة.
نقول إن I منتصف القطعة $[AB]$ إذا كان:

خاصية:

لتكن $[AB]$ قطعة.

I منتصف القطعة $[AB]$ إذا و فقط إذا كانت I تحقق إحدى المتساويتين: (1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ أو (2) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$

برهان: لدينا: I منتصف $[AB]$ تكافئ $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومن جهة أخرى, لدينا: I منتصف القطعة $[AB]$

$$\text{تكافئ } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\text{تكافئ } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\text{تكافئ } -2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} \text{ تكافئ } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$$

خاصية: (الخاصية المميزة لمنتصف قطعة)

لتكن $[AB]$ قطعة منتصفها I .

لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$

برهان: لتكن $[AB]$ قطعة و I منتصفها. لتكن M نقطة من المستوى، لدينا:

$$(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ لأن } I \text{ منتصف } [AB]) \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$$

و منه لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$

خاصية (خاصية منتصف ضلعي مثلث)

لبن ABC مثلثا. إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ فان: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

برهان: ليكن ABC مثلثا. I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \quad \text{لدينا:}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$