

## المادة: الرياضيات

## ملخص لدروس نهاية دالة محدودة

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا (علوم تجريبية)

## درس رقم 7/

الأستاذ: نجيب عثمانى

I. نهاية لا منتهية لدالة عند  $+\infty$  أو  $-\infty$ لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $[a; +\infty[$  حيث  $a \in \mathbb{R}$ .إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ " أو " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ ".يمكن التعبير بجمال مشابهة على النهايات التالية: " $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ " أو " $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ " أو " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ".

نهايات اعتيادية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \quad \bullet \quad \text{إذا كان } n \text{ زوجي} \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \quad \bullet$$

II. نهاية منتهية لدالة عند  $+\infty$  أو  $-\infty$ لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $[a; +\infty[$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  وليكن  $l$  عددا حقيقياإذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$ ".لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $]-\infty; b]$  حيث  $b \in \mathbb{R}$  وليكن  $l'$  عددا حقيقياإذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l'$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$  فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l'$ " أو " $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = l'$ ".

نهايات اعتيادية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \bullet$$

خاصية: لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  عددا حقيقياإذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  في  $+\infty$  (أو في  $-\infty$ ) فإن هذه النهاية وحيدة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{يكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \quad \text{يكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0$$

## III. النهاية المنتهية واللانهائية لدالة في نقطة

## 1. نهاية منتهية لدالة في نقطة

لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  و  $a$  عددين حقيقيين بحيث  $f$  معرفة على مجال على الشكل  $]a - \alpha; a + \alpha[$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}^{++}$ أو على مجموعة على الشكل  $\{a\} \cup ]a - \alpha; a + \alpha[$ إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a} f = l$ ".

## 2. خاصية

لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  و  $a$  عددين حقيقيينإذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  في  $a$  فإن هذه النهاية وحيدة.

## نهايات اعتيادية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \bullet$$

### 3. نهاية لا منتهية لدالة في نقطة

لتكن  $f$  دالة عددية و  $a \in \mathbb{R}$ .

إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ " أو " $\lim_a f = +\infty$ "

### IV. النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  و  $a$  عددين حقيقيين

■ إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ "

■ إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $+\infty$  (على التوالي إلى  $-\infty$ ) عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ "

أو " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ " (على التوالي  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ )

نعرف بنفس الطريقة النهاية على اليسار في نقطة

## نهايات اعتيادية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \quad \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad \text{فان} \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{فان} \quad \bullet \quad \text{إذا كان } n \text{ فردي غير منعدم, فان}$$

مبرهنة: لتكن  $f$  دالة عددية و  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{يكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

### V. العمليات على النهايات

في كل ما يلي  $a$  عدد حقيقي أو يساوي  $+\infty$  أو  $-\infty$  و  $l$  و  $l'$  عدنان حقيقيان , وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

#### 1. النهاية و الجمع:

|                                     |          |           |           |           |           |              |           |
|-------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$       | $l$      | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$    | $+\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$       | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$    | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | شكل غير محدد |           |

#### 2. النهاية و الضرب:

|                                  |        |             |             |             |             |           |           |           |                        |           |           |
|----------------------------------|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------|-----------|-----------|------------------------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$    | $l$    | $l \succ 0$ | $l \prec 0$ | $l \succ 0$ | $l \prec 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0                      | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$    | $l'$   | $+\infty$   | $+\infty$   | $-\infty$   | $-\infty$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ أو $-\infty$ | 0         |           |
| $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$ | $l.l'$ | $+\infty$   | $+\infty$   | $-\infty$   | $+\infty$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | شكل غير محدد           |           |           |

#### 3. النهاية و المقلوب:

| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$                          | $l' \in \mathbb{R}^*$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$     | $0^-$     |
|--------------------------------------------------------|-----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g} \right)(x)$ | $\frac{1}{l'}$        | 0         | 0         | $+\infty$ | $-\infty$ |

#### 4. النهاية و الخارج:

| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$                          | $l$            | $l$      | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ أو $l < 0$ | $+\infty$ أو $l > 0$ | $+\infty$ أو $l > 0$ | $-\infty$ أو $l < 0$ | $-\infty$ | 0            | $-\infty$ أو $+\infty$ |
|--------------------------------------------------------|----------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------|--------------|------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$                          | $l' \neq 0$    | $\infty$ | $l > 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $0^+$                | $0^+$                | $0^-$                | $0^-$                | $l < 0$   | 0            | $-\infty$ أو $+\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x)$ | $\frac{l}{l'}$ | 0        | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$            | $+\infty$            | $-\infty$            | $+\infty$            | $+\infty$ | شكل غير محدد |                        |

#### 5. نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$  هي نهاية حدها الأكبر درجة

#### 6. نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$  هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

#### 7. نهاية الدوال اللاجذرية

خاصية:

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال على الشكل  $[a; +\infty[$  بحيث  $\forall x \in [a; +\infty[ f(x) \geq 0$  نهاية دالة جذرية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$  هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  و  $l \geq 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $l \geq 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

ملاحظة: هذه خاصية تبقى صالحة إذا كان تؤول  $x$  إلى  $-\infty$  أو إلى  $a$  أو إلى  $a$  على اليمين أو إلى اليسار

#### 8. نهاية الدوال المثلثية

خاصيات:

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \bullet \quad \forall a \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \bullet$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{و } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0 \quad \bullet \quad \forall a \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \bullet$$