

المادة: الرياضيات

درس رقم 2/

الأستاذ: نجيب عثمان

ملخص لدرس: مجموعة الأعداد

القدرات المنتظرة:

أهداف الدرس:

I. المجموعات $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, D , $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

- الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ و نكتب: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$
- الأعداد الصحيحة النسبية أي الأعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ و نكتب: $\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
- الأعداد العشرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{a}{10^n}$ حيث: $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ تكون مجموعة نرمز لها بالرمز D و نكتب: $D = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \right\}$
- الأعداد الجذرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث: $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}^*$ تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$. و نكتب: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^* \right\}$
- الأعداد الجذرية و اللاجذرية تكون مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$. على مستقيم (D) مزود بمعلم (O, I) .
- ✓ كل عدد حقيقي يمكن أن نربطه بنقطة وحيدة من المستقيم (D) .
- ✓ عكسياً، كل نقطة M من المستقيم (D) تمثل عدد حقيقياً وحيداً x يسمى أفصولها.

أمثلة : استعمال الرموز: $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

- العدد -7 هو عنصر من $\mathbb{Z}$ نكتب $-7 \in \mathbb{Z}$ نقراً: " -7 ينتمي إلى $\mathbb{Z}$ " في حين -7 لا ينتمي إلى $\mathbb{N}$ و نكتب $-7 \notin \mathbb{N}$
- لدينا $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ و $\frac{2}{3} \notin D$ و ذلك لأنه لا يمكن كتابة $\frac{2}{3}$ على الشكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ لكن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ لأنه لا يمكن إيجاد عددين صحيحين a و b بحيث $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و b غير منعدم.
- كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي، نقول أن المجموعة $\mathbb{N}$ توجد ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- ليس كل عدد عشري هو عدد صحيح نسبي، نقول أن المجموعة D ليست ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $D \not\subset \mathbb{Z}$.
- لأي هناك عناصر من D لا تنتمي إلى $\mathbb{Z}$. كذلك: كل عنصر من D هو عنصر من $\mathbb{Q}$: $D \subset \mathbb{Q}$
- و كل عنصر من $\mathbb{Q}$ هو عنصر من $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. لدينا إذن: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

تمرين : حدد طبيعة كل عدد من الأعداد التالية: $3 + \sqrt{2}$, $\frac{6}{5}$, $-\frac{\sqrt{100}}{5}$

II. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ (تذكير)

الجمع في $\mathbb{R}$

a و b و c أعداد حقيقية

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$(-a) + a = a + (-a) = 0$$

الضرب في $\mathbb{R}$

a و b و c أعداد حقيقية

$$a \times b = b \times a = ab = ba$$

$$a(bc) = (ab)c = (ac)b = abc$$

$$a \neq 0; a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = \frac{a}{a} = 1$$

العمليات على الكسور:

a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}; \begin{cases} c \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{ak}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}; bc \neq 0$$

$-a$ يسمى مقابل a

$$a - b = a + (-b)$$

$$-(a - b) = -a + b$$

انتبه: إذا كان $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$ فان $a + c = b + d$

العكس غير صحيح: مثال مضاد: $3 + 9 = 7 + 5$ لكن $3 \neq 7$ و $3 \neq 5$.

$\frac{1}{a}$ يسمى مقلوب العدد a حيث $a \neq 0$

و يجب عدم الخلط بين المقلوب و المقابل.

الأستاذ: عثمانى نجيب

العدد $\frac{a}{b}$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}^*$.

يسمى خارج العدد a على b . $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

انتبه: إذا كان: $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$ فإن: $ac = bd$

العكس غير صحيح: مثال مضاد: $3 \times 4 = 2 \times 6$ لكن $3 \neq 2$ و $4 \neq 6$.
 a و b و c و d أعداد حقيقية حيث $bd \neq 0$ (تعني $b \neq 0$ و $d \neq 0$).

$$\frac{a}{b} = c \text{ يكافئ } a = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ يكافئ } ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = 1 \text{ يكافئ } a = b$$

$$\frac{a}{b} = 0 \text{ يكافئ } a = 0$$

انتبه: إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فهذا يعني أن $a = c$ و $b = d$.

مثال مضاد: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ لكن $8 \neq 4$ و $6 \neq 3$.

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فهذا يعني أن $a = c$ و $b = d$.

مثال مضاد: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ لكن $8 \neq 4$ و $6 \neq 3$.

III. الجذور المربعة:

تعريف:

ليكن x عددا حقيقيا موجبا. نسمي جذر مربع x , العدد الحقيقي الموجب y .

بحيث $y^2 = x$. و نكتب $\sqrt{x} = y$.

$\sqrt{x} = y$ يكافئ $x = y^2$ و $y \geq 0$.

أمثلة: $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{(-7)^2} = 7$; $\sqrt{(ab)^2} = ab$ إذا كان $ab > 0$

خاصية:

لكل a و b من $\mathbb{R}^+$ لدينا:

$$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; b > 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}; a > 0$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

إذا كان $x \geq 0$ و $y \geq 0$ فإن

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \text{ يكافئ } x = y.$$

$\sqrt{x} = 0$ اذا و فقط اذا كان $x = 0$.

انتبه:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$$

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ مثال مضاد:}$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

$$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

IV. القوى و قوى العدد 10 و الكتابة العلمية:

تعريف:

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم و $n \in \mathbb{N}$.

$$a^1 = a; a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{مرّة } n \text{ مرّة}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \dots \times \frac{1}{a}}_{\text{منالعوام } n \text{ لـ}}$$

V. العمليات على القوى:

لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ و لكل m و n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

حالة خاصة: قوى العدد 10:

$$10^1 = 10$$

$$10^0 = 1$$

$$10^{-2} = 0,01$$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^n = \underbrace{1000 \dots 0}_n; n \in \mathbb{N}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,000 \dots 01}_n; n \in \mathbb{N}$$

تبسيط عدد جذري:

$$\text{علما أن: } b^4 = \frac{16}{81} \text{ و } b^4 = \frac{64}{729} \text{ أحسب } b^2 \text{ (دون تحديد } b)$$

الكتابة العلمية:

كل عدد عشري x موجب يكتب على الشكل $x = a \times 10^p$ حيث p ينتمي الى $\mathbb{Z}$ و a عدد عشري بحيث $1 \leq a < 10$. هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية.

ملحوظة:

إذا كان x عددا سالبا فان كتابته العلمية هي $x = -a \times 10^p$

مثال: المسافة بين الأرض و الشمس هي: 149597870 كلم, تكتب $1,4959787 \times 10^8$ كلم.

متطابقات هامة _النشر و التعميل:

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

a و b أعداد حقيقية

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$k(a-b) = ka - kb$$

$$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

ملحوظة:

ننشر $(a+b)(a+b)^2$ و $(a-b)(a-b)^2$ و نحصل على المتطابقتين الهامتين التاليتين:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

مثال:

عندما تعجز الآلة الحاسبة

أحسب: $A = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحدتها

لتبسيط الحساب نضع: $x = 200520052006$

إذن: $200520052005 = x-1$ و $200520052007 = x+1$.

و منه: $A = x^2 - (x-1)(x+1)$

$$= x^2 - (x^2 - 1)$$

$$= x^2 - x^2 + 1$$

$$= 1$$

إذن: $A = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007) = 1$