

I. تقارب متتالية :

1. مثال تمهيدي :

(1) لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{3n^2 + n + 5}{(2n+1)^2}$

أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(2) لتكن (v_n) المتتالية الحسابية التي أساسها 100 وحدها الأول $v_0 = 3$.

i. أتمم الجدول التالي ثم تظن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
						

ii. أعط v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(3) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : w_n = (-1)^n$. أحسب w_n عندما يأخذ n قيما موجبة كبيرة.

2. تعريف :

i. نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ **متقاربة** إذا كانت لها نهاية منتهية l ($l \in \mathbb{R}$).

ii. نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ **متباعدة** إذا كانت غير متقاربة.

(إما لها نهاية غير منتهية وإما ليست لها نهاية)

مثال 2 : لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

بين أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية متقاربة.

3. نهاية المتتالية n^r ($r \in \mathbb{Q}^*$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{2}{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

لدينا :

خاصية :

ليكن r من $\mathbb{Q}^*$. إذا كان $r > 0$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$

إذا كان $r < 0$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$

II. مصاديق تقارب متتالية :

1. مثال 1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + 5$$

a. تحقق من أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n+2} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

b. استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : |u_n - 5| < \frac{1}{\sqrt{n}}$

خاصية 1 :

لتكن (u_n) متتالية عددية ولتكن (v_n) متتالية موجبة وليكن l عددا حقيقيا. (N عدد طبيعي)

إذا كان : $\forall n \geq N : |u_n - l| < v_n$ فإن :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ •

مثال : نعتبر المتتالية الواردة في المثال 1 . لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : |\mathcal{U}_n - 5| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ولدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = 5 \quad \text{إذن } (\mathcal{U}_n) \text{ متقاربة ولدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

خاصية 2 : (قانون الدرك . La loi des gendarmes)

لتكن $(\mathcal{U}_n)$ و $(\mathcal{V}_n)$ و $(\mathcal{W}_n)$ ثلاث متتاليات عددية وليكن l عددا حقيقيا . $(N$ عدد طبيعي)

إذا كان : $\forall n \geq N : \mathcal{V}_n < \mathcal{U}_n < \mathcal{W}_n$ • فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = l$ •

مثال : نعتبر المتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{U}_n = \frac{(-1)^n + n^2}{n^2 + \sin(\sqrt{n}) + 3}$

$$\forall n \geq 1 : \frac{n^2 - 1}{n^2 + 4} \leq \mathcal{U}_n \leq \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$$

ii. ماذا تستنتج ؟

خاصية 3 :

لتكن $(\mathcal{U}_n)$ و $(\mathcal{V}_n)$ متتاليتين عدديتين . $(N$ عدد طبيعي)

i. إذا كان : $\forall n \geq N : \mathcal{U}_n \geq \mathcal{V}_n$ • فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$ •

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$$

ii. إذا كان : $\forall n \geq N : \mathcal{U}_n \leq \mathcal{V}_n$ • فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$ •

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$$

مثال 3 :

1. لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 3}$ العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \geq 3 : \mathcal{U}_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n - 2}$

(a) تحقق من أن : $\forall n \geq 3 : \mathcal{U}_n \geq \frac{n^2 - 1}{n}$

(b) استنتج تقارب المتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 3}$.

2. لتكن $(\mathcal{V}_n)_{n \geq 0}$ العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \geq 0 : \mathcal{V}_n = \frac{\sin(n) - n}{2 + \sqrt{n}}$

(a) تحقق من أن : $\forall n \geq 0 : \mathcal{V}_n \leq -\sqrt{n} + 2$

(b) استنتج تقارب المتتالية العددية $(\mathcal{V}_n)_{n \geq 0}$.

تمرين :

ليكن $q > 1$. نضع : $t = q - 1$.

1. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : (1+t)^n \geq 1 + nt$

2. استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$

خاصية 4 :

ليكن q من $\mathbb{R}$ بحيث $q \neq 1$.

i. إذا كان $q > 1$: فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

ii. إذا كان $-1 < q < 1$: فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

iii. إذا كان $q \leq -1$: فإن : (q^n) لا تقبل نهاية .

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 3 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n + 1 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

مثال 4 :

$$(1) \text{ بين أن : } \forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{O}_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(\mathcal{O}_n - 2)$$

$$(2) \text{ استنتج أن : } \forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{O}_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(3) \text{ استنتج : } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_n$$

خاصية 5 :

i. كل متتالية تزايدية ومكبورة هي متتالية متقاربة .

ii. كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة .

مثال 5 : لتكن $(\mathcal{O}_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \mathcal{O}_n = 1 - \frac{1}{n^n}$

(1) بين أن المتتالية العددية $(\mathcal{O}_n)_{n \geq 1}$ تزايدية ومكبورة بالعدد 1 .

(2) ماذا تستنتج ؟

استنتاج :

i. كل متتالية تزايدية وسالبة هي متتالية متقاربة .

ii. كل متتالية تناقصية وموجبة هي متتالية متقاربة .

نتائج أخرى :

i. لتكن $(\mathcal{O}_n)_{n \geq n_0}$ و $(\mathcal{U}_n)_{n \geq n_0}$ متتاليتين متقاربتين حيث : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{O}_n = l'$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = l$ و $(l, l') \in \mathbb{R}^2$

إذا كان $\mathcal{U}_n < \mathcal{O}_n$: $\forall n \geq N$ (حيث $N \in \mathbb{N}$ و $N \geq n_0$) ؛ فإن : $l \leq l'$

ii. كل متتالية موجبة ومتقاربة تكون نهايتها موجبة .

III. العمليات على نهايات المتتاليات :

1. نهاية مجموع متتاليتين عدديتين :

$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	نهاية $(\mathcal{O}_n)$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	$l' \in \mathbb{R}$	نهاية $(\mathcal{O}_n)$
F.I.	شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	∞	نهاية $(\mathcal{O}_n + \mathcal{U}_n)$

2. نهاية جداء متتاليتين عدديتين :

∞	∞	∞	$l \in \mathbb{R}$	نهاية $(\mathcal{O}_n)$
0	∞	$l \neq 0$	$l' \in \mathbb{R}$	نهاية $(\mathcal{O}_n)$
F.I.	∞	∞	$l \times l'$	نهاية $(\mathcal{O}_n \times \mathcal{U}_n)$

3. نهاية خارج متتاليتين عدديتين :

∞	0	∞	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	$l \in \mathbb{R}$	نهاية $(\mathcal{O}_n)$
∞	0	0	∞	0^- أو 0^+	$l' \in \mathbb{R}^*$	نهاية $(\mathcal{O}_n)$
F.I.	F.I.	∞	∞	∞	$\frac{l}{l'}$	نهاية $\left(\frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{U}_n}\right)$

IV. المتتاليات من النوع $u_{n+1} = f(u_n)$:

✓ **مثال 1 :** لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [-6, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{x+6}$

a. تحقق من أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم $y = x$ يتقاطعان في النقطة ذات الأضلاع 3 .

b. أنشئ (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c. تحقق من أن : $f(I) \subset I$.

- (2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :
- $$\begin{cases} u_0 = -5 & , (u_0 \in I) \\ u_{n+1} = f(u_n) & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

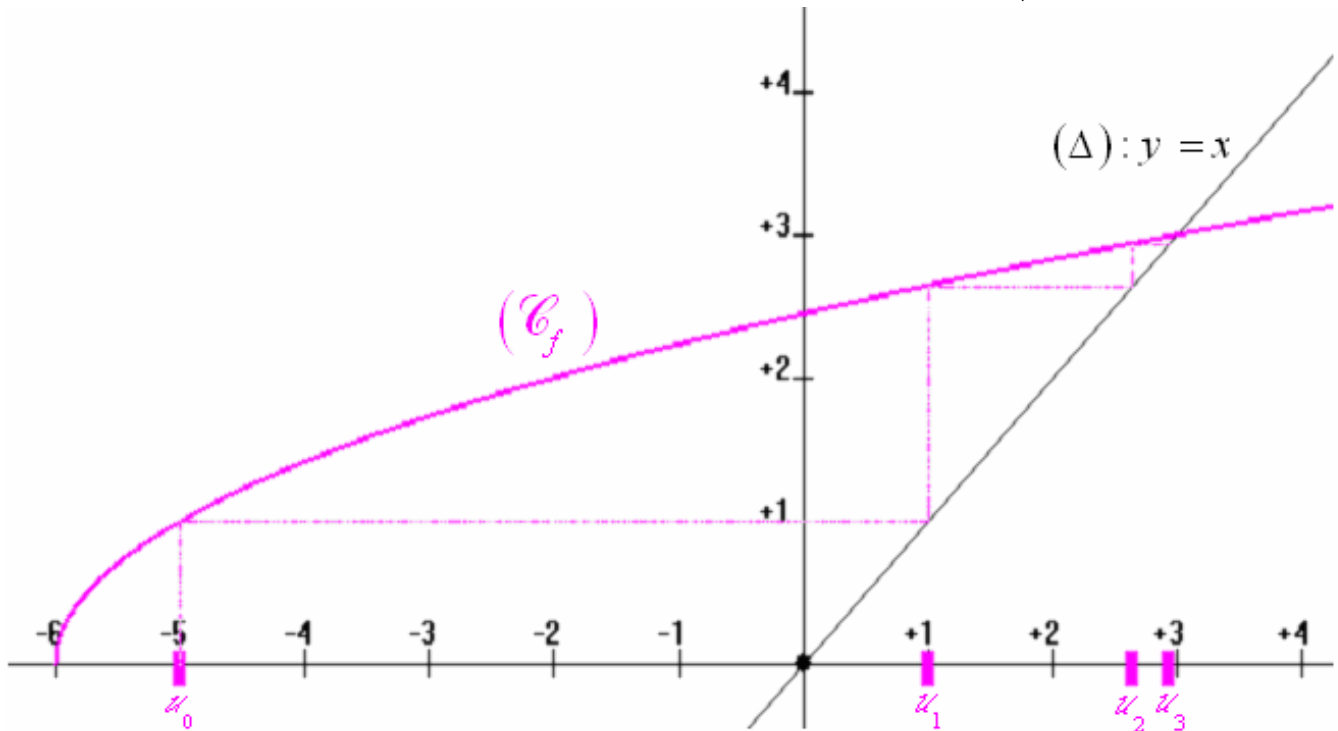
- a. أحسب u_1 و u_2 .
b. مثل على محور الأفاصيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
c. من أي عدد تقترب حدود المتتالية ؛ عندما يصبح n عددا موجبا كبيرا جدا ؟

الحل :

(1) a. لدينا : لكل $x \in [-6, +\infty[$ ، لدينا : $x = 3 \Leftrightarrow [x + 6 = x^2 \text{ و } x \geq 0] \Leftrightarrow x = 3$ ،

$f(3) = \sqrt{3+6} = 3$. إذن $A(3,3) \in (C_f)$ و $A(3,3) \in (\Delta)$. $(\Delta) \cap (C_f) = \{A(3,3)\}$.

b. إنشاء المنحنى (C_f) وتمثيل الحدود u_0 و u_1 و u_2 و u_3 على محور الأفاصيل :



c. لدينا f متصلة وتزايدية قطعاً على المجال I . إذن : $f(I) = [f(-6), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty[$:

ومنه فإن : $f(I) \subset I$.

(2) a. لدينا : $u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = \sqrt{-5 + 6} = 1$ و $u_2 = \sqrt{u_1 + 6} = \sqrt{1 + 6} = \sqrt{7} \approx 2.64575131106$.

b. أنظر الشكل السابق . $u_3 = \sqrt{u_2 + 6} = \sqrt{\sqrt{7} + 6} \approx 2.94036584647$.

و $u_4 = \sqrt{u_3 + 6} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{7} + 6} + 6} \approx 2.99004445560$.

c. لدينا : **حساب الحدود العشرون الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ باستعمال**

le logiciel de calcul formel Maple10

> **f:=x->sqrt(x+6);**

$f := x \rightarrow \sqrt{x+6}$

> **suite:=proc(f,n,u0)**

local i;

u||0:=u0;

for i from 0 to n do

u||(i+1):=eval(f(u||(i))) :

print(evaln(u||(i+1))=eval(u||(i+1)))

```

end do
end proc:
> suite(f,7,-5);

```

$$\begin{aligned}
 u1 &= 1 \\
 u2 &= \sqrt{7} \\
 u3 &= \sqrt{\sqrt{7} + 6} \\
 u4 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{7} + 6} + 6} \\
 u5 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7} + 6} + 6} + 6} \\
 u6 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7} + 6} + 6} + 6} + 6} \\
 u7 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7} + 6} + 6} + 6} + 6} + 6} \\
 u8 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7} + 6} + 6} + 6} + 6} + 6} + 6}
 \end{aligned}$$

```

> suite1:=proc(f,n,u0)
  local i;
  u||0:=u0;
  for i from 0 to n do
    u||(i+1):=evalf(f(u||(i)),30) :
    print(evaln(u||(i+1))=evalf(u||(i+1),30))
  end do
end proc:
> suite1(f,19,-5);

```

$$\begin{aligned}
 u1 &= 1. \\
 u2 &= 2.64575131106459059050161575364 \\
 u3 &= 2.94036584646614860494545433374 \\
 u4 &= 2.99004445560030906456624628358 \\
 u5 &= 2.99834028349023604692134853692 \\
 u6 &= 2.99972336782747952892094569035 \\
 u7 &= 2.99995389428362374105881896328 \\
 u8 &= 2.99999231570409588958614848011 \\
 u9 &= 2.99999871928374260924236724846 \\
 u10 &= 2.99999978654728284119665079539 \\
 u11 &= 2.99999996442454692926396493454 \\
 u12 &= 2.99999999407075781568467534238 \\
 u13 &= 2.99999999901179296911802036775 \\
 u14 &= 2.99999999983529882818181564863 \\
 u15 &= 2.99999999997254980469684368923 \\
 u16 &= 2.99999999999542496744947045972 \\
 u17 &= 2.99999999999923749457491164638
 \end{aligned}$$

$$u18 = 2.99999999999987291576248527170$$

$$u19 = 2.99999999999997881929374754521$$

$$u20 = 2.9999999999999646988229125753$$

نلاحظ أنه ؛ كلما آل n إلى $+\infty$ ؛ إلا واقترب u_n من العدد 3 . $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

ملاحظة : كل حدود المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تنتمي إلى المجال $I = [-6, +\infty[$

ولدينا : $u_0 \xrightarrow{f} u_1 \xrightarrow{f} u_2 \xrightarrow{f} u_3 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} u_n \xrightarrow{f} u_{n+1} \xrightarrow{f} \dots$ و $f(I) \subset I$

إذن : $u_0 \in I \Rightarrow u_1 = f(u_0) \in I \Rightarrow u_2 = f(u_1) \in I \Rightarrow \dots \Rightarrow u_{n-1} \in I \Rightarrow u_n = f(u_{n-1}) \in I \Rightarrow \dots$

خاصية *

لتكن f دالة عددية وليكن I مجال غير فارغ ضمن D_f ؛
و لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

إذا كان :

✓ f دالة متصلة على المجال I .

✓ $f(I) \subset I$.

✓ $u_0 \in I$.

✓ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة .

فإن نهايتها l هي حل للمعادلة : $f(x) = x$ ؛ في المجال I .

تمرين تطبيقي : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I =]6, +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{2}{5} \times \frac{x^2 + 3x + 6}{x - 2}$$

(1) a) بين أن f متصلة وتزايدية قطعاً على المجال I .

(b) حدد $f(I)$.

(2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = f(u_n) , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 6$.

(b) بين بالترجع أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية قطعاً على المجال I .

(c) استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .

(d) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

مثال : لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{حيث : } f(x) = \frac{x+2}{x} , \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

> **f:=x->(x+2)/x;**

باستعمال البرنامج Maple 10 ، لدينا :

$$f := x \rightarrow \frac{x + 2}{x}$$

> **suite(f,13,10);**

$$u1 = \frac{6}{5}$$

$$u_2 = \frac{8}{3}$$

$$u_3 = \frac{7}{4}$$

$$u_4 = \frac{15}{7}$$

$$u_5 = \frac{29}{15}$$

$$u_6 = \frac{59}{29}$$

$$u_7 = \frac{117}{59}$$

$$u_8 = \frac{235}{117}$$

$$u_9 = \frac{469}{235}$$

$$u_{10} = \frac{939}{469}$$

$$u_{11} = \frac{1877}{939}$$

$$u_{12} = \frac{3755}{1877}$$

$$u_{13} = \frac{7509}{3755}$$

$$u_{14} = \frac{15019}{7509}$$

> **suite1(f,13,10);**

$$u_1 = 1.20000000000000000000000000000000$$

$$u_2 = 2.666666666666666666666666666667$$

$$u_3 = 1.75000000000000000000000000000000$$

$$u_4 = 2.14285714285714285714285714286$$

$$u_5 = 1.933333333333333333333333333333$$

$$u_6 = 2.03448275862068965517241379311$$

$$u_7 = 1.98305084745762711864406779661$$

$$u_8 = 2.00854700854700854700854700855$$

$$u_9 = 1.99574468085106382978723404255$$

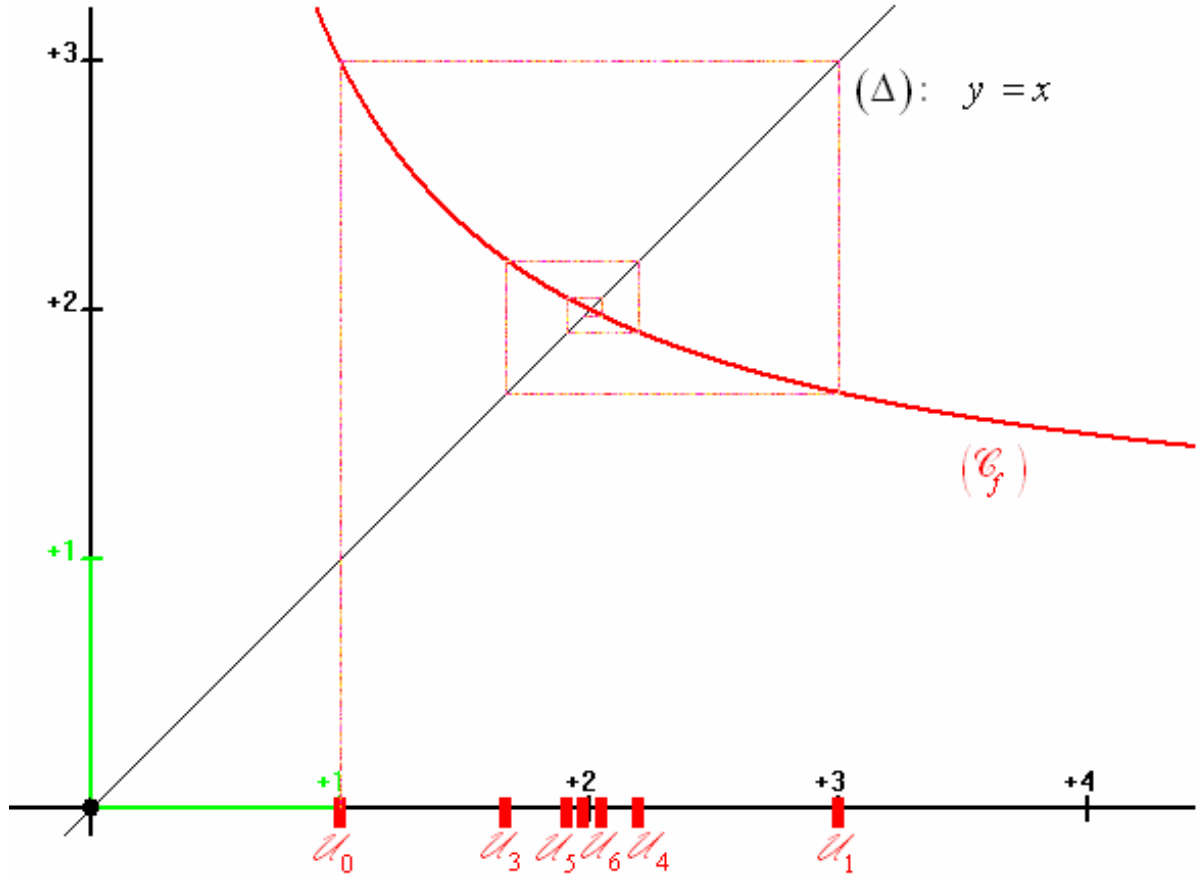
$$u_{10} = 2.00213219616204690831556503198$$

$$u_{11} = 1.99893503727369542066027689031$$

$$u_{12} = 2.00053276505061267980820458178$$

$$u_{13} = 1.99973368841544607190412782956$$

نلاحظ أن حدود المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقترب من العدد 2 .



♣ f دالة متصلة على المجال $[1,3]$.

♣ $f([1,3]) = \left[\frac{5}{3}, 3\right] \subset [1,3]$.

♣ $u_0 \in [1,3]$ ، ومنه نستنتج أن : $u_n \in [1,3] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

♣ نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. لدينا :

$$\text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{u_n + 2}{u_n} - 2}{\frac{u_n + 2}{u_n} + 1} = \frac{-u_n + 2}{2u_n + 2} = -\frac{1}{2} \frac{u_n - 2}{u_n + 1} = -\frac{1}{2} v_n$$

متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$ ، ومنه فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 : \text{ فإن } \left| -\frac{1}{2} \right| < 1 : \text{ بما أن } \forall n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 q^n = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

وبالتالي فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l تحقق $f(l) = l$ و $l \in [1,3]$. إذن :

$$l = 2 \text{ أو } l = -1 \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{l+2}{l} = 1 \Leftrightarrow f(l) = l \text{ و بما أن } l \in [1,3] : \text{ فإن } l = 2$$

خلاصة : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.