

المستوى: 2 ^{ème} BAC STE+STM	الدوال الأصلية Les fonctions primitives	الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقنية - سيدي قاسم الأستاذ: محمد اليمني
عدد الساعات: 5 ساعات		

التوجيهات الرسمية
تحدد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات هذه الدوال.

أهداف الدرس
➤ تعرف دالة أصلية لدالة متصلة ➤ تعرف الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية

القدرات المنتظرة
➤ تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية . ➤ استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال .

الامتدادات
➤ الحساب التكاملي ➤ الدوال اللوغاريتمية والأسية .
➤ علوم الحياة والأرض ➤ العلوم الفيزيائية

فقرات الدرس
➤ الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال ➤ الدوال الأصلية لمجموع دالتين
➤ الدوال الأصلية لجداء دالة في عدد حقيقي ➤ جدول الدوال الأصلية

I - الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال :

(1) تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .

كل دالة عددية F قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$; تسمى دالة أصلية للدالة f على I .

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^2 + 2x - 1$

الدالة F المعرفة على IR بما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 2$ هي دالة أصلية للدالة f لأن F قابلة للاشتقاق على IR

ولدينا : $\forall x \in IR : F'(x) = f(x)$.

(2) خاصيات :

خاصية 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على I .

الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال F المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي .

بين هذه الخاصية

مثال : الدوال الأصلية للدالة f على IR بما يلي : $f(x) = x^2 + 2x - 1$ هي الدوال F المعرفة على IR بما يلي :

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + k$ حيث k عدد حقيقي .

خاصية 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و x_0 عنصرا من I و y_0 عدد حقيقي معلوم .
إذا كانت f تقبل دالة أصلية على مجال I فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G بحيث : $G(x_0) = y_0$ مثال : في المثال السابق لدينا : الدوال الأصلية للدالة f هي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + k$ حيث k عدد حقيقي .

حدد الدالة الأصلية G للدالة f حيث $G(0) = 1$:

لدينا : $k = 1 \Leftrightarrow G(0) = 1$ إذن : $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$ هي الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق : $G(0) = 1$.

خاصية 3 :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

II - الدوال الأصلية لدالة لمجموع دالتين ولجداء دالة في عدد حقيقي :

خاصية :

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال I و α عدد حقيقي .
إذا كانت F و G دالتين أصليتين على التوالي للدالتين f و g على I فإن :

- الدالة $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على I .
- الدالة αF دالة أصلية للدالة αf على I .

أمثلة :

- الدوال الأصلية للدالة المعرفة على IR^* بما يلي : $x \mapsto 2 \cos x - \frac{1}{x^2}$ هي الدالة المعرفة على IR^* بما يلي :
- $F(x) = 2 \sin x + \frac{1}{x} + k$ حيث k عدد حقيقي .
- الدوال الأصلية للدالة المعرفة على $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$ بما يلي : $x \mapsto 2x + \frac{3}{\cos^2 x}$ هي الدالة المعرفة على $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$ بما يلي : $F(x) = x^2 + 3 \tan x + c$ حيث c عدد حقيقي .

III - الدوال الأصلية لدوال اعتيادية - الدوال الأصلية والعمليات :

انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات الدوال الاعتيادية و العمليات على الدوال المشتقة نحصل على الجدول التالي :

الدالة f	F دالة أصلية للدالة f	إحيز التعريف
$f(x) = a ; a \in IR$	$F(x) = ax + k ; k \in IR$	$I = IR$
$f(x) = x^n ; n \in IN$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k ; k \in IR$	$I = IR$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k ; k \in IR$	$I = IR^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} ; n \in IN^* - \{1\}$	$F(x) = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + k ; k \in IR$	$I = IR^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k ; k \in IR$	$I =]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k ; k \in IR$	$I = IR$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k ; k \in IR$	$I = IR$
$f(x) = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + k ; k \in IR$	$I = \left\{ x \in IR / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$

$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + k ; k \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \cos(ax + b) ; (a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + k ; k \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \sin(ax + b) ; (a \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k ; k \in \mathbb{R}$	
$f(x) = (u(x))^r \times u'(x) ; r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{r+1} (u(x))^{r+1} + k ; k \in \mathbb{R}$	
$f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$F(x) = u(x)v(x) + k$	
$f(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$	$F(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + k$	
$f(x) = u'(ax + b) ; a \in \mathbb{R}^* ; b \in \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a} u(ax + b) + k$	

تمارين :

تمرين 1 :

حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على I في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $I = \mathbb{R} ; f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

(2) $I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + 3$

(3) $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[; f(x) = 1 + \tan^2 x + \sin x$

(4) $I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(5) $I = \mathbb{R} ; f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

تمرين 2 :

(1) تمرين 25 ص 67 من الكتاب المدرسي في رحاب الرياضيات .

(2) تمرين 26 ص 67 من الكتاب المدرسي في رحاب الرياضيات .

تمرين 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{(x-1)^2}$.

(1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ لكل x من $\mathbb{R} - \{1\}$.

(2) استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$.

(3) حدد الدالة الأصلية G للدالة f التي تحقق : $G(2) = 0$.