

المتتاليات العددية

(I) عموميات :

1- تعريف:

نسمى متتالية عددية كل تطبيق u من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$

$$\begin{matrix} u : I \rightarrow \mathbb{R} \\ n \rightarrow u(n) \end{matrix}$$

* نرمز ل $u(n)$ بالرمز u_n .

* نرمز للمتتالية u بالرمز: $(U_n)_{n \in I}$

* u_n يسمى الحد ذا المد n .

2- ملاحظة: - نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ منتهية إذا كانت I منتهية ونقول إنها غير منتهية إذا كانت I غير منتهية.

2- تساوي متالتين:

نقول إن $(U_n)_{n \in I}$ و $(V_n)_{n \in J}$ متساويتين إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{cases} I = J \\ (\forall n \in I) u_n = v_n \end{cases}$$

3- العمليات على المتتاليات:

$$(U_n)_{n \in I} + (V_n)_{n \in I} = (U_n + V_n)_{n \in I}$$

$$(U_n)_{n \in I} \cdot (V_n)_{n \in I} = (U_n V_n)_{n \in I}$$

$$\lambda (U_n)_{n \in I} = (\lambda U_n)_{n \in I} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

4- المتتالية الدورية:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي

$$(\forall n \geq n_0) U_{n+p} = U_n$$

غير منعدم p بحيث أصغر عدد p يحقق الشرط يسمى دور المتتالية.

(II) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$:

مكبورة، إذا وفقط إذا كان: $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in I) u_n \leq M$

مصغورة، إذا وفقط إذا: $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in I) m \leq u_n$

محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني:

$$(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall n \in I) m \leq u_n \leq M$$

ملاحظة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ محدودة:

$$\text{إذا وفقط إذا: } (\exists M > 0)(\forall n \in I) |u_n| \leq M$$

(III) المتتالية الرتيبة:

تعريف: نقول إن $(U_n)_{n \geq n_0}$.

تزايدية إذا وفقط إذا كان: $(\forall n \geq n_0) u_n \leq u_{n+1}$

تزايدية قطعاً إذا وفقط إذا كان: $(\forall n \geq n_0) u_n < u_{n+1}$

تناقصية إذا وفقط إذا كان: $(\forall n \geq n_0) u_n \geq u_{n+1}$

تناقصية قطعاً إذا وفقط إذا كان: $(\forall n \geq n_0) u_n > u_{n+1}$

ثابتة إذا وفقط إذا كان: $(\forall n \geq n_0) u_n = u_{n+1}$

(IV) دراسة بعض المتتاليات الترجعية:

1- المتتاليات الحسابية:

1- تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = u_n + r$$

حقيقي r بحيث العدد r يسمى أساس هذه المتتالية.

و u_0 الحد الأول لهذه المتتالية.

ملاحظة:

- تكون المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين حدين متتابعين ثابتاً وهذه الثابتة هي الأساس.

- كل متتالية حسابية تكون معرفة بحددها الأول وأساسها. أو بحددها وأساسها.

2- خاصية مميزة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حسابية إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$$

$$U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n \quad \text{يعني}$$

ملاحظة:

تكون الأعداد a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية

$$a + c = 2b$$

3- الحد العام لمتتالية حسابية:

خاصية:

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0 .

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = U_0 + nr$$

لدينا:

ملاحظة:

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

بصفة عامة: إذا كان u_p و u_n حدين من متتالية حسابية

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

4- مجموع حدود متتالية لمتتالية حسابية:

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

لدينا:

إذا كان حدها الأول هو u_1

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ لدينا:}$$

إذا كان حدها الأول هو u_1

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ فإن:}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q} \text{ ملاحظة:}$$

حيث: u_p هو الحد الأول في المجموع و u_n الحد الأخير في المجموع.

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1 - (\text{raison})}$$

nombre de termes = (dernier indice - premier indice) + 1

V- نهاية متتالية:

1- تعريف

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

• نقول إن المتتالية (U_n) تتوّل إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow U_n > A$$

ونكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

• نقول إن المتتالية (U_n) تتوّل إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow U_n < -A$$

ونكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

• نقول إن (U_n) تتوّل إلى العدد L إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$$

ونكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$

ملاحظة:

* إذا كانت المتتالية (U_n) تقبل نهاية منتهية، نقول إنها متقاربة
* كل متتالية غير متقاربة تسمى متباعدة.

2- مصادق التقارب:

(1) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث: $|u_n - l| \leq v_n$ انطلاقا

من صف ما.

$$\lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = l$$

لدينا:

(2) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث: $u_n \leq v_n$ انطلاقا من

صف ما:

$$\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim v_n = +\infty$$

$$\lim v_n = -\infty \Rightarrow \lim u_n = -\infty$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2} \text{ فإن:}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \frac{(u_p + u_n)}{2} \text{ ملاحظة:}$$

حيث: u_p هو الحد الأول في المجموع و u_n الحد الأخير في المجموع.

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

nombre de termes = (dernier indice - premier indice) + 1

2- المتتاليات الهندسية:

1- تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = qu_n \text{ حقيقي } q \text{ بحيث:}$$

- العدد q يسمى أساس هذه المتتالية.

و u_0 الحد الأول لهذه المتتالية.

ملاحظة:

- تكون المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا كان خارج

حدين متتابعين ثابتا وهذه الثابتة هي الأساس.

- كل متتالية هندسية تكون معرفة بحددها الأول وأساسها. أو بحددها وأساسها.

2- خاصية مميزة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (U_n)^2 = U_{n-1} \times U_{n+1}$$

ملاحظة:

تكون الأعداد a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية

$$\text{هندسية إذا وفقط إذا كان } b^2 = a \times c$$

3- الحد العام لمتتالية هندسية:

خاصية:

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0 .

$$(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = U_0 q^n \text{ لدينا:}$$

ملاحظة:

$$U_n = U_1 q^{n-1} \text{ إذا كان الحد الأول هو } u_1$$

بصفة عامة: إذا كان U_p و U_n حدين من متتالية هندسية

أساسها r فإن $U_n = U_p q^{n-p}$ (ترتيب p و n غير مهم).

4- مجموع حدود متتالية هندسية:

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

(4) توسيع مفهوم النهاية:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$
l	l'	$l + l'$
l	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n \cdot v_n)$
l	l'	ll'
$l \neq 0$	∞	∞ (الإشارة)
∞	∞	∞
0	∞	شكل غير محدد
$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l \neq 0$	0	∞
l	∞	0
∞	∞	شكل غير محدد
0	0	شكل غير محدد

VI- المتتاليات المتحدية:

تعريف:

نقول إن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متحديتان إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq V_n \quad (*)$$

$(*)$ (U_n) تزايدية و (V_n) تناقصية.

$$(*) \quad \lim(V_n - U_n) = 0$$

خاصية:

إذا كانت (U_n) و (V_n) متحديتين فإنهما متقاربتان ولهما نفس النهاية.

$$\boxed{u_{n+1} = f(u_n)} \quad \text{VII- المتتاليات الترجعية.}$$

خاصية:

لتكن f دالة معرفة على مجال I ونعتبر المتتالية:

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

إذا كانت $f(I) \subset I$ فإن المتتالية معرفة.

إذا كانت f متصلة على I و (u_n) متقاربة فإن نهايتها L تحقق $f(L) = L$

(3) لتكن (U_n) و (V_n) ثلاث متتاليات بحيث:

$$\boxed{w_n \leq u_n \leq v_n} \text{ انطلاقا من صف ما.}$$

إذا كانت (U_n) و (w_n) متقاربتين ولهما نفس النهاية L فإن: (u_n) متقاربة و $\lim u_n = L$.

خاصية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & ; & q > 1 \\ 1 & ; & q = 1 \\ 0 & ; & -1 < q < 1 \\ \text{pas de limites} & ; & q \leq -1 \end{cases}$$

(3) التقارب والرتابة:

خاصية (1):

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية.

إذا كانت (U_n) متقاربة وموجبة انطلاقا من صف ما فإن:

$$\boxed{\lim u_n \geq 0}$$

استنتاج:

$(*)$ لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين متقاربتين

إذا كانت $\boxed{u_n \leq v_n}$ انطلاقا من صف ما فإن $\boxed{\lim u_n \leq \lim v_n}$

ملاحظة:

$(*)$ لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين متقاربتين

إذا كان $\boxed{u_n \leq v_n}$ فإن $\boxed{\lim u_n \leq \lim v_n}$ والعكس غير صحيح.

خاصية (2): مقبولة.

+ كل متتالية تزايدية ومكبورة. متقاربة.

+ كل متتالية تناقصية ومصغورة. متقاربة.

حالة خاصة:

$(*)$ كل متتالية تناقصية وموجبة. متقاربة.

$(*)$ كل متتالية تزايدية وسالبة. متقاربة.

- العمليات على المتتاليات المتقاربة.

خاصية:

إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتين متقاربتين فإن المتتاليات $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, (αu_n) متقاربة.

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

$$\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$$

$$\lim(\alpha u_n) = \alpha \lim u_n$$

- وإذا كانت $\lim v_n \neq 0$ فإن $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ متقاربة.

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} \quad \text{و}$$