

اشتقاق الدوال العددية

I - تذكير :

1 () اشتقاق دالة في نقطة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$.

• نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a ونرمز له بالرمز $f'(a)$ أو

$\frac{df}{dx}(a)$. ونكتب : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ أو $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

• إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في a فإن الدالة : $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$ (أو الدالة : $h \mapsto f(a) + hf'(a)$)

تسمى الدالة التآلفية المماسية للدالة f في النقطة a . وتسمى أيضا التقريب التآلفي للدالة f بجوار a .

العدد : $f(a) + hf'(a)$ هو التقريب التآلفي للعدد $f(a+h)$ بجوار 0 ونكتب : $f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$ بجوار 0.

• معادلة المماس لمنحنى الدالة في a هي : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

2 () الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار :

تعريف :

• لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a; a+\alpha]$ حيث $\alpha > 0$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين

في a إذا كان يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على

اليمين في a ونرمز له بالرمز $f'_d(a)$ ونكتب : $f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0, h > -a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ أو $f'_d(x) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

• لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a-\alpha; a]$ حيث $\alpha > 0$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار

في a إذا كان يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x \rightarrow a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار

في a ونرمز له بالرمز $f'_g(a)$ ونكتب : $f'_g(a) = \lim_{h \rightarrow 0, h < -a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ أو $f'_g(x) = \lim_{x \rightarrow a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$. نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا كانت f

قابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في a و $f'_d(a) = f'_g(a)$.

3 () الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة :

تعريف :

• نقول إن f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

• نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a; b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال المفتوح

$]a; b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة للاشتقاق على اليسار في b .

• الدالة المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' .

• إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ويرمز لها بالرمز f'' .

4 () الكتابة التفاضلية :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $y = f(x)$ فإننا نكتب اصطلاحا $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dx$ هذه

الكتابة تسمى الكتابة التفاضلية .

5 () الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية - العمليات على الدوال المشتقة :

انظر الجدول المرفق

جدول يلخص الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية و قواعد العمليات على الدوال المشتقة

الدالة f	الدالة المشتقة	مجموعة التعريف
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	IR
$a \neq 0 \quad f(x) = ax$	$f'(x) = a$	IR
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	IR
$(n \in IN^* - \{1\}) \quad f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	IR
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	IR^*
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	IR^*
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_f = [0; +\infty[$ غير قابلة للاشتقاق في 0
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	IR
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	IR
$f(x) = \tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad f'(x) =$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$	$D_u \cap D_v$
$f(x) = \alpha \cdot u(x)$	$f'(x) = (\alpha \cdot u)'(x) = \alpha \cdot u'(x)$	D_u
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = (u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$D_u \cap D_v$
$f(x) = \frac{1}{v(x)}$	$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{(v(x))^2}$	$v(x) \neq 0 \quad D_v$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$	$v(x) \neq 0 \quad D_u \cap D_v$
$f(x) = (u(x))^n$	$(u^n)'(x) = nu^{n-1}(x)u'(x)$	$(n \in IN^*) \quad D_u$
$f(x) = (u(x))^n$	$(u^n)'(x) = nu^{n-1}(x)u'(x)$	$(n \in Z^*) \quad u(x) \neq 0 \quad D_u$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0 \quad D_u$

6 اشتقاق الدوال الاعتيادية :

خاصيات :

1. كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على IR .
2. كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها .
3. الدالتين : $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ قابلتان للاشتقاق على IR .

4. الدالة : $x \mapsto \tan x$ قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$.

5. الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

II - الاتصال والاشتقاق :

خاصية :

لتكن f معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I ؛ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a فإن f متصلة في a .

ملاحظة :

عكس هذه الخاصية غير صحيح

مثال مضاد :

لتكن f الدالة المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = |x|$

لدينا f متصلة في 0 لكن f غير قابلة للاشتقاق في 0 لأن $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ (تحقق من ذلك)

نتيجة :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f متصلة على I .

III - اشتقاق مركب دالتين :