

<http://www.meljohra.ift.cx>

ثانوية علال بن عبد الله
نيابة بني ملال

المتتاليات العددية

تقارب متتالية عددية

EL JOHRA MOHAMED

09

الحصة رقم 1	4
I. تذكير	4
1. تعريف	4
2. اصطلاحات	4
3. تمرين تذكيري بالمتتاليات الحسابية	4
4. الحل	5
الحصة رقم 2	6
5. معارف أساسية خاصة بالمتتاليات الحسابية	8
a. تعريف	8
b. الخاصية المميزة	8
c. خاصيات	8
d. تمرين تذكيري بالمتتاليات الهندسية	8
e. الحل	8
6. معارف أساسية خاصة بالمتتاليات الهندسية	9
a. تعريف	9
b. الخاصية المميزة	9
c. خاصيات	9
الحصة رقم 4	11
II. نهاية متتالية	11
1. متتالية مقاربة	11
a. نشاط	11
b. الحل	11
c. تعريف	11
d. أمثلة	11
الحصة رقم 5	13
7. متتالية متباعدة	13
a. نشاط	13
b. الحل	13
c. تعريف	13
d. ملاحظة	13
e. أمثلة	14
الحصة رقم 6	15
III. النهايات و الترتيب	15
1. خاصية 1	15

2.	استنتاج 1	15
3.	خاصية 2	15
4.	خاصية 3	15
5.	خاصية 4	15
6.	مثال مضاد	15
7.	تمرين محلول 1 ص 93	15
8.	تمرين محلول 3 ص 93	15
الحصة رقم 7		17
IV.	نهاية المتتالية الهندسية qnn	17
1.	خاصية مقبولة	17
2.	الرتابة و تقارب متتالية	17
3.	خاصية	17
4.	تمرين 1	17
5.	الحل	17
6.	تمرين 2	17
7.	الحل	18
الحصة رقم 8		19
V.	تقارب متتالية من نوع $un + 1 = fun$	19
1.	خاصية	19
2.	تمرين تطبيقي 1	19
الحصة رقم 9		20
VI.	تقارب متتالية من نوع $vn=f(un)$	20
1.	خاصية	20
2.	مثال	20
3.	تمرين 30 ص 110 من الواضح	20

الحصة رقم 1

I. تذكير

1. تعريف

نسمي متتالية كل دالة عددية u معرفة على IN أو جزئ I من IN

2. اصطلاحات

لتكن $u : I \subset IN \rightarrow IR$ دالة عددية

نرمز لصورة n بالرمز u_n عوض $u(n)$

U_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_n$ أو الحد ذا المدل n

مجموعة قيم المتتالية $(u_n)_n$ هي $\{u_n / n \in I\}$

3. تمرين تذكيري بالمتتاليات الحسابية

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$

و نعتبر المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة ب $v_n = \frac{2}{1 - u_n}$ لكل n من IN

دراسة تجريبية للمتتالية (v_n) على ورقة عمل Excel

أحسب الحدود العشرين الأولى للمتتاليتين (u_n) و (v_n)

مثل هندسيا الحدود العشرين الأولى للمتتالية (v_n)

ماذا تلاحظ و ما تخمينك بطبيعة المتتالية $(v_n)_n$

دراسة نظرية

بين أن المتتالية $(v_n)_n$ حسابية محددا أساسها و حدها الأول

أحسب v_n بدلالة n

استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

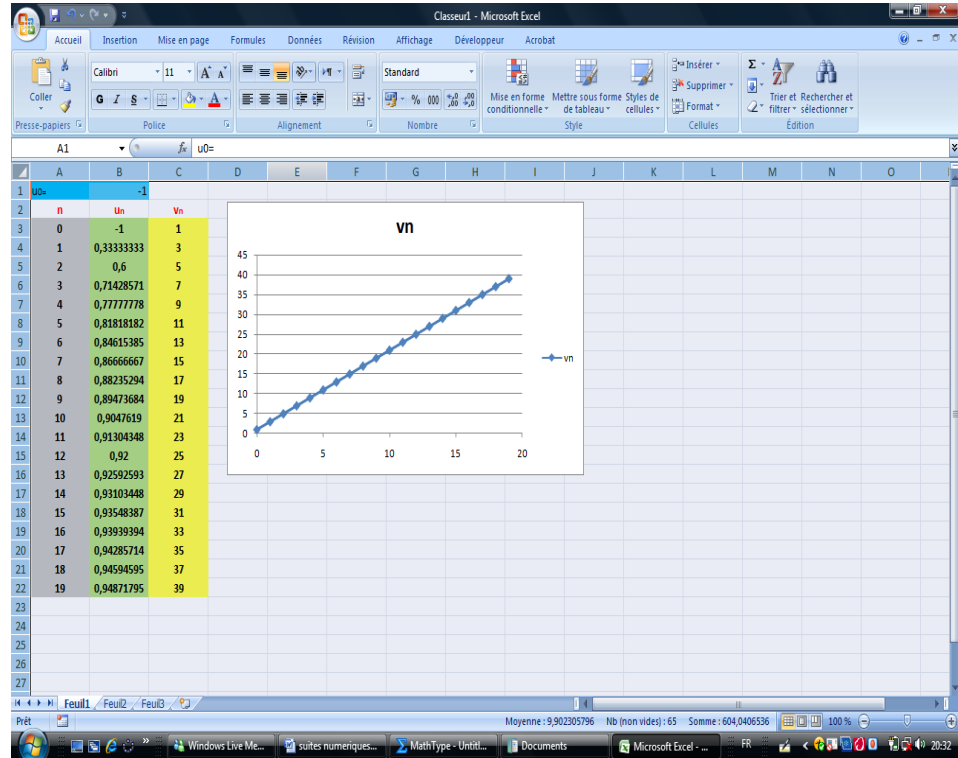
نضع لكل n من IN^* $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

أحسب S_n بدلالة n

دراسة تجريبية

تحقق من النتائج المحصل عليها في الدراسة النظرية

4. الحل دراسة تجريبية



نلاحظ أن التمثيل المبياني للحدود العشرين الأولى للمتتالية (v_n) عبارة عن مستقيم ميله هو $r=2$ و هذا ما يجعلنا نعطي كفرضية أولى ما يلي: المتتالية $(v_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ و حدها الأول $v_0=1$ أنظر الجدول

الحصة رقم 2

دراسة نظرية

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{2}{1-u_n}; u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}; (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\ \Rightarrow v_{n+1} &= \frac{2}{1-u_{n+1}} = \frac{2}{1-\frac{1}{2-u_n}} = \frac{2(2-u_n)}{1-u_n} \\ \Rightarrow v_{n+1} - v_n &= \frac{2(2-u_n)}{1-u_n} - \frac{2}{1-u_n} \\ \Rightarrow v_{n+1} - v_n &= 2; (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

ومن المتتالية $(v_n)_n$ حسابية أساسها $r=2$ و حدها الأول $v_0=1$

بما أن المتتالية $(v_n)_n$ حسابية أساسها $r=2$ و حدها الأول $v_0=1$ فإن :

$$v_n = v_0 + n r; (\forall n \in \mathbb{N})$$

يعني أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $v_n = 1 + 2n$

استنتاج u_n بدلالة n

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{2}{1-u_n}; (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow 1+2n &= \frac{2}{1-u_n} \\ \Rightarrow 1-u_n &= \frac{2}{1+2n} \\ \Rightarrow u_n &= 1 - \frac{2}{1+2n} = \frac{1+2n-2}{1+2n} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{-1+2n}{1+2n}; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1+2n}{1+2n} = 1 \text{ لدينا : استنتاج النهاية}$$

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ هو مجموع $n+1$ حدا متتابعة في متتالية حسابية : الحد الأول في المجموع هو $v_0=1$ و الحد الأخير

في المجموع هو $v_n = 1+2n$ ومنه :

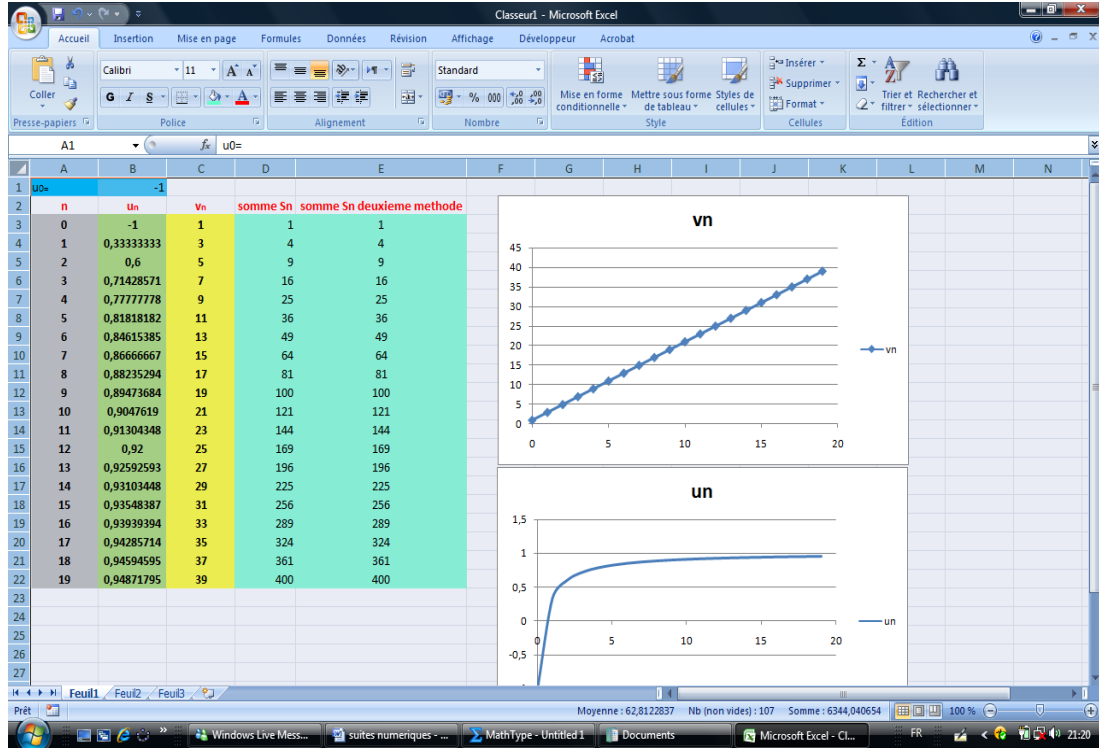
$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= \frac{(n+1)}{2} (v_0 + v_n) \\ &= \frac{(n+1)}{2} (1+1+2n) \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

عودة للدراسة التجريبية

بتمثيل حدود المتتالية (u_n) نلاحظ أنه عبارة عن جزء من هذلول و هو ما يفسر صيغة u_n

نلاحظ أنه من خلال الشكل أن الحدود u_n تقترب شيئا فشيئا من العدد 1

بتكوين عمودين للعدد S_n واحد اعتمادا على $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و الآخر اعتمادا على $(n+1)^2$ نلاحظ أن القيم متساوية



الحصة رقم 3

5. معارف أساسية خاصة بالمتتاليات الحسابية

a. تعريف

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r إذا و فقط إذا كان $u_{n+1} - u_n = r$ $(\forall n \geq n_0)$
العدد r غير مرتبط بالعدد n

b. الخاصية المميزة

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r إذا و فقط إذا كان $2u_{n+1} = u_{n+2} + u_n$ $(\forall n \geq n_0)$

c. خاصيات

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r :
 $(\forall n \geq p \geq n_0) ; u_n = u_p + (n - p)r$

$$(n_0 = 0) ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = u_0 + nr$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)}{2} (u_p + u_n)$$

d. تمرين تذكيري بالمتتاليات الهندسية

بين أن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ لكل n من $\mathbb{N}$ متتالية هندسية محددًا أساسها

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q و بحيث : $8u_7 = u_4$
حدد الأساس q

حدد الحد الأول u_0 علما أن $u_3 = \frac{3}{8}$

نعتبر المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

بين أن $S_n = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

e. الحل

تبيان أن $(v_n)_n$ هندسية

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}$$

بما أن $2/3$ مستقل عن n فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2/3$

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q و بحيث : $8u_7 = u_4$
تحديد الأساس q :

$$8u_7 = u_4 \Leftrightarrow 8q^{7-4}u_4 = u_4$$

$$\Rightarrow 8q^3 = 1$$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

تحديد الحد الأول u_0 علما أن $u_3 = \frac{3}{8}$

$$u_3 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow q^3 u_0 = \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 u_0 = \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow u_0 = 3$$

نعتبر المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$
وهو مجموع n حدا متتابعة في متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 3$
ومنه :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

$$= u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$S_n = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

6. معارف أساسية خاصة بالمتتاليات الهندسية

a. تعريف

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q إذا و فقط إذا كان $u_{n+1} = q u_n$ ($\forall n \geq n_0$)
العدد q غير مرتبط بالعدد n

b. الخاصية المميزة

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q إذا و فقط إذا كان $(u_{n+1})^2 = u_{n+2} \times u_n$ ($\forall n \geq n_0$)

c. خاصيات

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q :

$$(\forall n \geq p \geq n_0); u_n = q^{n-p} \times u_p$$

$$(n_0 = 0); (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = q^n \times u_0$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}; (q \neq 1)$$

جامعة محمد

الحصة رقم 4

II. نهاية متتالية

1. متتالية متقاربة

a. نشاط

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بـ : $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} ; n \in \mathbb{N}^*$

أوجد عددا صحيحا طبيعيا n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن $u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[$

ماذا يمكنك استنتاجه و ذلك بتغيير العدد 10^{-3} بعدد أصغر منه و أيا كان ؟

b. الحل

نضع : $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} ; n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \in]-10^{-3}; 10^{-3}[$$

$$\Leftrightarrow -10^{-3} < u_n < 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -10^{-3} < \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow n\sqrt{n} > \frac{1}{10^{-3}}$$

$$\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^3$$

$$\Leftrightarrow n^3 > 10^6$$

$$\Leftrightarrow n > 10^2$$

و منه من أجل $n_0=100$ نلاحظ أن جميع حدود المتتالية تحقق : $u_n \in]-10^{-3}; 10^{-3}[$; $(n > n_0)$

يمكنك تغيير العدد 10^{-3} بعدد أصغر منه و أيا كان

نستنتج إذن أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

c. تعريف

نقول إن متتالية $(u_n)_n$ تؤل إلى العدد الحقيقي l إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية

ابتداء من رتبة معينة n_0

و نكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

d. أمثلة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad ; (\forall p \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0 \quad ; (\forall p \in \mathbb{N}^*)$$

الاجتهاد

الحصة رقم 5

7. متتالية متباعدة

a. نشاط

نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_n$ المعرفة بما يلي : $v_n = 3^n - 2n + 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

بين بالترجع أنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $3^n \geq 3n$

استنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_n \geq n$

ماذا يمكنك أن تستنتج عندما يأخذ n قيمة كبيرة بما فيه الكفاية؟

استنتج قيمة $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

b. الحل

الترجع:

لدينا $3^0 = 1 > 3 \times 0$

نفترض أن $3^n \geq 3n$ ولنبين أن $3^{n+1} \geq 3(n+1)$

$$3^{n+1} - 3(n+1) = 3 \times 3^n - 3n - 3$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} - 3(n+1) \geq 3 \times 3n - 3n - 3$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} - 3(n+1) \geq 6n - 3$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} - 3(n+1) \geq 3(2n-1) > 0$$

و منه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $3^n \geq 3n$

الاستنتاج

$$v_n = 3^n - 2n + 1$$

$$\Rightarrow v_n \geq 3n - 2n + 1$$

$$\Rightarrow v_n \geq n + 1 > n$$

$$\Rightarrow v_n > n$$

نستنتج أنه كلما أخذ n قيمة كبيرة جدا فإن v_n يأخذ قيمة كبيرة جدا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ ومنه}$$

c. تعريف

نقول إن متتالية $(u_n)_n$ تؤول إلى $+\infty$ إذا اشتمل كل مجال مفتوح من شكل $]A, +\infty[$ على جميع حدود المتتالية $(u_n)_n$ انطلاقا

من رتبة معينة n_0 و نكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

d. ملاحظة

بالمثل نعرف الكتابة $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

e. أمثلة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad ; (\forall p \in \mathbb{N}^*)$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n} = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty \quad ; (\forall p \in \mathbb{N}^*)$$

جامعة محمد

الحصة رقم 6

III. النهايات والترتيب

1. خاصية 1

$(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتان عدديتان متقربتان و بحيث يوجد n_0 من $\mathbb{N}$ الذي من أجله :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ فإن $u_n \leq v_n; (\forall n \geq n_0)$

2. استنتاج 1

كل متتالية موجبة و متقاربة تكون نهايتها موجبة

3. خاصية 2

$(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ بحيث : $v_n \leq u_n \leq w_n; (\forall n \geq n_0)$
 إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

4. خاصية 3

$(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتان عدديتان و l عدد حقيقي بحيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ و $|u_n - l| \leq v_n$
 فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

5. خاصية 4

$(u_n)_n$ متتالية لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$$

و لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|$$

و العكس غير صحيح

6. مثال مضاد

نضع $u_n = -1 + \frac{1}{n}; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |-1| = 1$ لكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 1$

7. تمرين محلول 1 ص 93

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة لكل n من $\mathbb{N}^*$ بما يلي : $u_n = \frac{2n + \sin(n)}{n}$

تحقق أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |u_n - 2| \leq \frac{1}{n}$

استنتج نهاية المتتالية (u_n)

8. تمرين محلول 3 ص 93

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة لكل n من $\mathbb{N}$ بما يلي : $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

تحقق من أن $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - 3| = \frac{1}{n^2 + 1}$

استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الجزء الثاني

الحصة رقم 7

IV. نهاية المتتالية الهندسية $(q^n)_n$

1. خاصية مقبولة

ليكن q عددا حقيقيا غير منعدم

إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

إذا كان $q = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية $(q^n)_n$ لا تقبل نهاية

2. الرتبة و تقارب متتالية

3. خاصية

كل متتالية تزايدية و مكبورة فهي متقاربة
كل متتالية تناقصية و مصغورة فهي متقاربة

4. تمرين 1

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{-1}{u_n + 2} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n > -1$

أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_n$ ثم استنتج أنها متقاربة

5. الحل

الترجع

التحقق لدينا $u_0 = 1 > -1$

نفترض أن $u_n > -1$ ولنبين أن $u_{n+1} > -1$

6. تمرين 2

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة ب : $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n \\ u_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$

بين أن $0 < u_n < 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_n$.

استنتج أن $\frac{1}{4} < u_n$, $(\forall n \in \mathbb{N})$

تحقق أن $0 < (1 - u_{n+1}) < \frac{3}{4}(1 - u_n)$

حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

7. الحل

الجزء الثاني

الحصة رقم 8

V. تقارب متتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

1. خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و $(u_n)_n$ متتالية معرفة كما يلي : $a \in I$; $\begin{cases} u_{n0} = a ; \\ u_{n+1} = f(u_n) ; (\forall n \geq n_0) \end{cases}$

إذا كانت f متصلة على المجال I و $f(I) \subset I$

فإن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و نهاية المتتالية $(u_n)_n$ حل للمعادلة $f(x)=x$ في المجال I

2. تمرين تطبيقي 1

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

و نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x^2$ لكل $x \geq 0$

تحقق أن f متصلة على $I=[0;+\infty[$ و أن $f(I) \subset I$

بين بالترجع أن $0 \leq u_n \leq \frac{3}{4}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_n$

بين أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و أحسب نهايتها

الحصة رقم 9

VI. تقارب متتالية من نوع $v_n = f(u_n)$

1. خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و $(u_n)_n$ متتالية بحيث لكل $n \geq n_0$ لدينا $u_n \in I$ و لتكن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و نهايتها l

نضع $(v_n)_n$ المتتالية المعرفة ب : $v_n = f(u_n)$ لكل $n \geq n_0$

إذا كان f متصلة في l فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$

2. مثال

نضع $v_n = \sqrt{\frac{2n+1}{n+2}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = f(u_n)$ حيث : $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ و $f(x) = \sqrt{x}$

الدالة f معرفة على $[0, +\infty[$ ، و $u_n \in [0, +\infty[$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

بما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2$

و f متصلة في 2 فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{2}$

3. تمرين 30 ص 110 من الواضح

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ب : $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$

أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$