

I - عموميات :

1. أمثلة تمهيدية :

مثال 1 : أتمم بشكل منطقي ما يلي : ... ; ... ; 16 ; 12 ; 8 ; 4

نقترح تخصيص رمز لكل من هذه الأعداد ؛ لهذا نضع :

$$u_2 = 4 ; u_3 = 8 ; u_4 = 12 ; u_5 = 16 ; \dots$$

فيكون لدينا :

u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	
4	8	12	16	20	24	28	32	

التطبيق u ، الذي يربط كل عنصر n من $I = \{2;3;4;5;\dots\}$ جزء من المجموعة $\mathbb{N}$ ؛ بالعدد

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}$$

الحقيقي u_n ، يسمى **متتالية عددية** . أي :

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

نرمز أيضا للمتتالية u بالرمز $(u_n)_{n \geq 2}$ أو (u_n) .

الأعداد الحقيقية u_2 و u_3 و u_4 و ... و u_n و ... تسمى **حدود** المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 2}$.

العدد الصحيح الطبيعي n ، يسمى **مذل** الحد u_n .

مثال 2 : لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\mathcal{U}_n = n^2$ لكل $n \geq 0$.

1. أحسب $\mathcal{U}_0$ و $\mathcal{U}_1$ و $\mathcal{U}_2$.

2. حدد بدلالة n : $\mathcal{U}_n + 1$ و $\mathcal{U}_{n+1}$ و $\mathcal{U}_{n-1}$ و $\mathcal{U}_n - 1$.

الحد الأول للمتتالية العددية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$ هو $\mathcal{U}_0 = 0$.

$\mathcal{U}_n$: يسمى الحد العام للمتتالية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$.

$\mathcal{U}_{n+1}$: يسمى الحد الموالي للحد العام للمتتالية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$.

$\mathcal{U}_{n-1}$: يسمى الحد السابق للحد العام للمتتالية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$.

2. تعريف :

I جزء غير فارغ من $\mathbb{N}$. كل تطبيق من I نحو $\mathbb{R}$ يسمى **متتالية عددية**

مثال 1 : لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{U}_n = \frac{n}{n+1}$ ✓

1. أحسب $\mathcal{U}_0$ و $\mathcal{U}_1$ و $\mathcal{U}_2$.

2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \mathcal{U}_n \leq 1$.

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* : \mathcal{U}_{n+1} = 2\mathcal{U}_n + 1 \\ \mathcal{U}_1 = 3 \end{cases}$$

مثال 2 : لتكن $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة كالآتي : ✓

أحسب $\mathcal{U}_2$ و $\mathcal{U}_3$ و $\mathcal{U}_4$.

Les suites bornées :

II - المتتاليات المحدودة :

1. تعريف :

ليكن n_0 من $\mathbb{N}$.

(a) تكون المتتالية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq n_0}$ **مكبورة** بعدد الحقيقي M ، إذا كان : $\forall n \geq n_0 : \mathcal{U}_n \leq M$

(b) تكون المتتالية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq n_0}$ **مصغورة** بعدد الحقيقي m ، إذا كان : $\forall n \geq n_0 : m \leq \mathcal{U}_n$

(c) تكون المتتالية $(\mathcal{U}_n)_{n \geq n_0}$ **محدودة** ، إذا كانت مصغورة ومكبورة ؛ أي :

إذا وجد عدداً حقيقياً m و M بحيث : $\forall n \geq n_0 : m \leq \mathcal{U}_n \leq M$

2. مثال : لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{5n-2}{3n+4}$

- i. بين أن (u_n) مكبورة بالعدد $\frac{5}{3}$.
ii. بين أن (u_n) مصغورة بالعدد $-\frac{1}{2}$.

ملحوظة : تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ **محدودة**؛ إذا وفقط إذا وجد α من $\mathbb{R}^+$ بحيث : $\forall n \geq n_0 : |u_n| \leq \alpha$.

تمرين : لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية محدودة .

Les suites monotones :

III- المتتاليات الرتيبة :

1. تعريف :

- (a) تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ **تزايدية**؛ إذا كان لكل $m \geq n_0$ ولكل $p \geq n_0$: $p < m \Rightarrow u_p \leq u_m$
(b) تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ **تناقصية**؛ إذا كان لكل $m \geq n_0$ ولكل $p \geq n_0$: $p < m \Rightarrow u_p \geq u_m$

2. ملاحظات :

- i. $(u_n)_{n \geq n_0}$ تزايدية. $\Leftrightarrow \forall n \geq n_0 : u_n \leq u_{n+1}$
ii. $(u_n)_{n \geq n_0}$ تناقصية. $\Leftrightarrow \forall n \geq n_0 : u_n \geq u_{n+1}$
iii. $(u_n)_{n \geq n_0}$ تزايدية قطعاً. $\Leftrightarrow \forall n \geq n_0 : u_n < u_{n+1}$
iv. $(u_n)_{n \geq n_0}$ تناقصية قطعاً. $\Leftrightarrow \forall n \geq n_0 : u_n > u_{n+1}$
v. نقول إن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية **رتيبة**؛ إذا كانت تزايدية أو تناقصية .

مثال : أدرس رتبة المتتالية (u_n) في كلتا الحالتين : a. $u_n = \frac{1}{n}$. b : $u_n = 2 + \frac{3}{n^2+1}$.

Les suites arithmétiques :

IV- المتتاليات الحسابية :

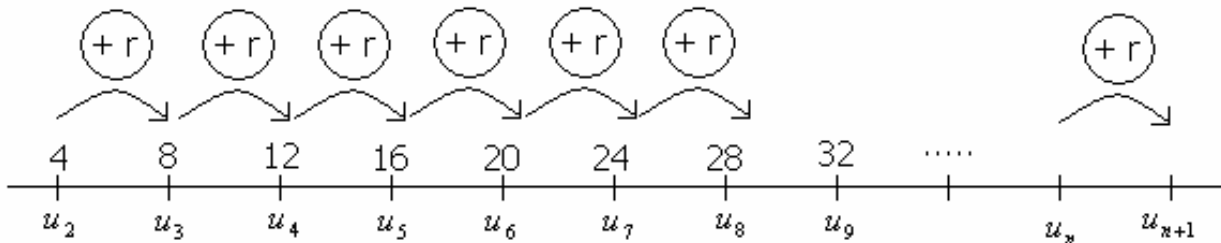
1. مثال 1:

u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	
4	8	12	16	20				

- (a) أتمم بشكل منطقي الجدول التالي:
(b) أوجد العلاقة بين u_n و u_{n+1} .

(c) أ. أحسب u_{50} .

ب. أكتب u_n بدلالة n و u_0 و r ؛ (حيث : $r = u_{n+1} - u_n$)



المرور من حد u_n إلى الحد u_{n+1} يتم بإضافة العدد r ، حيث $r = 4$:

u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	
4	8	12	16	20	24	28	32	

2. تعريف :

تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية ؛ إذا وجد عدد حقيقي r (غير مرتبط ب n) بحيث :

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$$

العدد الحقيقي r ؛ يسمى أساس المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq n_0}$.

مثال : المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 2}$ المعرفة في المثال السابق هي متتالية حسابية حدها الأول $u_2 = 4$

$$\begin{cases} u_2 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4 ; n \geq 2 \end{cases} \quad \text{وأساسها } r = 4 . \text{ ونكتب :}$$

3. صيغة الحد العام :

خاصية :

إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r ؛ فإن :

$$u_n = u_0 + n.r ; \text{ ولدينا كذلك : } u_n = u_1 + (n-1).r ; \text{ وبصفة عامة : } u_n = u_p + (n-p).r$$

4. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية : قاعدة :

عدد الحدود $u_p ; u_{p+1} ; \dots ; u_{n-1} ; u_n$ هو :

$$n - p + 1$$

1 + أصغر مدل - أكبر مدل

خاصية :

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r . نضع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$S = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$$

لدينا :

$$\text{مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية} = \frac{(\text{الحد الأخير للمجموع} + \text{الحد الأول للمجموع}) \times \text{عدد الحدود}}{2}$$

مثال : لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 600$ وأساسها $r = -4$.

- أحسب : u_1 و u_2 و u_3 .
- حدد u_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_{100} .
- أحسب المجموع : $A = u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.
- حدد بدلالة n ؛ المجموع : $B = u_3 + u_4 + \dots + u_n$.

5. شرط تتابع ثلاثة حدود من متتالية حسابية :

خاصية :

تكون الأعداد a و b و c ؛ في هذا الترتيب ؛ حدودا متتابعة من متتالية حسابية

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{إذا وفقط إذا كان :}$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n & ; & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_2 و u_3 و u_4 .

2. لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_n = 3^n . u_0$ ؛ $\forall n \in \mathbb{N}$.

أ- بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب تعبير u_n بدلالة n ، ثم استنتج تعبير u_n بدلالة n .

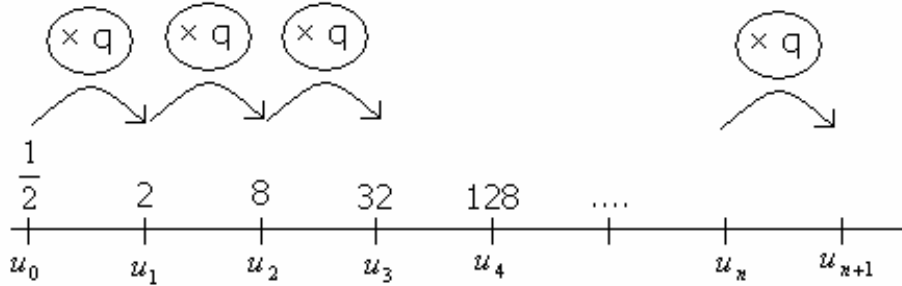
V- المتتاليات الهندسية :

1. مثال :

u_0	u_1	u_2	u_3		
$\frac{1}{2}$	2	8	32		

- a. أتمم بشكل منطقي الجدول التالي :
b. أوجد العلاقة بين u_{n+1} و u_n .
c. أ. حدد u_{50} .

ب. حدد u_n بدلالة n و u_0 و q (بحيث $u_{n+1} = qu_n$) .



2. تعريف :

تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية ؛ إذا وجد عدد حقيقي q (غير مرتبط ب n) بحيث :

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = qu_n$$

العدد الحقيقي q ؛ يسمى أساس المتتالية الهندسية $(u_n)_{n \geq n_0}$.

مثال : المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة في المثال السابق ؛ متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 4u_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{وأساسها } q = 4 \text{ ، ونكتب :}$$

3. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

خاصية :

إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0 ؛ فإن :

$$u_n = q^n u_0 ; \text{ ولدينا كذلك : } u_n = q^{n-1} u_1 ; \text{ وبصفة عامة : } u_n = q^{n-m} u_m$$

4. مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

خاصية :

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0 . نضع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

✓ إذا كان $q = 1$ ؛ فإن : $S = n u_0$. أي : الحد الأول للمجموع $\times$ عدد الحدود S

$$S = u_0 \times \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \quad \text{✓ إذا كان } q \neq 1 \text{ ؛ فإن :}$$

عدد الحدود	1
- أساس	
مجموع حدود متتابعة	$\times$
الحد الأول للمجموع	
= من متتالية هندسية	1
- أساس	

مثال : لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $u_0 = \frac{1}{16}$.

أ. أحسب : u_1 و u_2 و u_3 .

أ. حدد u_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_{14} .

iii. حدد بدلالة n ؛ المجموع التالي : $A_n = u_2 + u_3 + \dots + u_{n+3}$.

5. شرط تتابع ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية : $a ; b ; c ; \dots$ خاصة :

تكون الأعداد a و b و c (في هذا الترتيب) حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان : $b^2 = ac$

6. تمارين تطبيقية :

تمرين 1 : لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n & ; & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. أحسب u_2 و u_3 و u_4 .

2. لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$.

أ- بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب تعبير v_n بدلالة n .

ج- ليكن n من $\mathbb{N}^*$. أحسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ بدلالة n .

د- استنتج تعبير u_n بدلالة n .

تمرين 2 : لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n & ; & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. أحسب u_2 و u_3 و u_4 .

2. لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$.

أ- بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب تعبير v_n بدلالة n ، ثم استنتج تعبير u_n بدلالة n .

تمرين 3 : لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{4 + u_n} & ; & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 .

2. لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$: $\forall n \in \mathbb{N}$.

أ- أحسب v_0 و v_1 و v_2 .

ب- بين أن : $0 < v_n < 1$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

ج- بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .

د- بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

هـ- أكتب تعبير v_n بدلالة n ، ثم استنتج تعبير u_n بدلالة n .

تمرين 4 : نعتبر $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 & , & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $v_n = u_n - 3$: $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. حدد طبيعة المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. حدد v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج u_n بدلالة n .

3. حدد؛ بدلالة n ؛ المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$