

المستوى : 2 ^{ème} BAC STE+STM	المتتاليات العددية Les suites numériques	الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقية - سيدي قاسم الأستاذ : محمد اليمني
عدد الساعات : 15 ساعة		

www.sbaysite.com

الأستاذ محمد اليمني

التوجيهات الرسمية

لقد تم التطرق خلال السنة الأولى من سلك البكالوريا، إلى عموميات حول المتتاليات العددية وإلى مميزات المتتاليات الحسابية والهندسية وبعض تطبيقاتهما لتعويد التلاميذ على التعامل مع وضعيات متقطعة ووصفها باستعمال المتتاليات، كما كان مناسبة لممارسة بعض أنواع الاستدلالات الرياضية (البرهان بالترجع على سبيل المثال) . أما خلال هذه السنة فيتم تزويد التلاميذ ببعض الأدوات الضرورية لدراسة سلوك متتالية عددية شموليا وبجوار مالا نهائية واستخلاص نتائج بشأنها وتوظيفها في تحديد تقرّيات لبعض الأعداد الحقيقية وفي حل مسائل متنوعة من مواد التخصص.

إن درس المتتاليات لا ينتهي بانتهاء الفصل المخصص لها بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة لذلك، بمختلف فصول المقرر اللاحقة . كما يتم التركيز على توظيف المتتاليات في حل المسائل المتعلقة بالتأطير والتقريب سواء لأعداد حقيقية أو صيغ وتعابير جبرية... ويكون هذا الفصل مناسبة لممارسة الاستدلالات الرياضية والدقة في صياغة البراهين والنصوص الرياضية.

أهداف الدرس

➤ تعرف متتالية (u_n) بحيث $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ ➤ استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهاية متتالية . ➤ دراسة تقارب متتالية تزايدية ومكبورة ومتتالية تناقصية ومصغورة ➤ تحديد نهاية متتالية انطلاقا من نهاية متتالية هندسية أو حسابية .	➤ تعرف نهاية متتالية مرجعية ➤ تعرف متتالية متقاربة ➤ استعمال مصاديق التقارب لتحديد نهاية متتالية . ➤ تعرف نهاية (a^n) . ➤ تعرف متتالية (u_n) بحيث $u_{n+1} = f(u_n)$ وتحديد نهاية (u_n) ➤ تعرف متتالية (u_n) بحيث $u_{n+1} = au_n + b$
--	--

القدرات المنتظرة

➤ استعمال المتتاليات في حل مسائل متنوعة من مجالات مختلفة . ➤ تحديد نهاية متتالية (u_n) متقاربة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I وتحقق $f(I) \subset I$	➤ استعمال متتالية الحسابية والمتتاليات الهندسية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل : $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ و $u_{n+1} = au_n + b$ ➤ استعمال المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب لتحديد نهاية متتالية .
--	--

الامتدادات

➤ الإحصاء ➤ علوم الحياة والأرض ➤ العلوم الفيزيائية ➤ العلوم الاقتصادية	➤ الحساب التكاملي ➤ الدوال اللوغاريتمية والأسية . ➤ الأعداد العقدية .
--	--

فقرات الدرس	
I - تذكير II - نهاية متتالية : تعريف ؛ المتتالية المتقاربة ؛ خاصيات ؛ نهايات المتتاليات المرجعية III - العمليات على النهايات - المتتاليات والترتيب	IV - مصاديق تقارب متتالية V - متتاليات خاصة

I - تذكير :

(1) تعريف متتالية عددية :

- ليكن I جزء من $\mathbb{N}$. كل دالة عددية من I نحو $\mathbb{R}$ تسمى متتالية عددية . نرسم للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n \in I}$
- إذا كان $I = \mathbb{N}$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو $(U_n)_{n \geq 0}$ أو (U_n) .
- إذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ أو $(U_n)_{n \geq 1}$.

(2) المتتاليات المكبورة - المتتاليات المصغرة - المتتاليات المحدودة :

تعريف :

- تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ مكبورة إذا كان يوجد عدد حقيقي M بحيث : $U_n \leq M$ (أو $U_n < M$) لكل n من I .
- تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ مصغرة إذا كان يوجد عدد حقيقي m بحيث : $U_n \geq m$ (أو $U_n > m$) لكل n من I .
- تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة ومصغرة . أي يوجد عددين حقيقيين M و m بحيث :
 $m \leq U_n \leq M$ لكل n من I . (أو : $m < U_n < M$ لكل n من I) .

خاصية :

- تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ محدودة إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي $\alpha > 0$ بحيث : $|U_n| \leq \alpha$ لكل n من I .
(أو : $|U_n| < \alpha$ لكل n من I) .

(3) المتتاليات الرتيبة :

لنكن $(U_n)_{n \in I}$ متتالية عددية .

- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ تزايدية إذا كان : $\forall n \in I : U_n \leq U_{n+1}$.
- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ تزايدية قطعاً إذا كان : $\forall n \in I : U_n < U_{n+1}$.
- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ تناقصية إذا كان : $\forall n \in I : U_n > U_{n+1}$.
- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ تناقصية قطعاً إذا كان : $\forall n \in I : U_n > U_{n+1}$.

ملاحظات :

- لدراسة رتبة متتالية $(U_n)_{n \in I}$ نتبع إحدى الطرق التالية :

1. نقارن U_n و U_{n+1}
2. ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$.
3. إذا كانت $U_n > 0$ نقارن U_n و $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

4. إذا كانت $U_n = f(n)$ فإننا نستعمل رتبة الدالة f .

- إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية تزايدية فإن : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots$.
- إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية تناقصية فإن : $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots$.

(4) المتتاليات الحسابية - المتتاليات الهندسية :

أ - المتتاليات الحسابية :

تعريف :

- تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث : $U_{n+1} = U_n + r$ لكل n من I . العدد r يسمى أساس المتتالية .

➤ ملاحظة :

لكي نبين أن متتالية $(U_n)_{n \in I}$ حسابية يكفي أن نبين أن الفرق $U_{n+1} - U_n$ عدد ثابت لكل n من I . أي غير مرتبط ب n . (فرق حدين متتابعين عدد ثابت) .

➤ خاصيات :

1. خاصية مميزة : تكون $(U_n)_{n \in I}$ متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n$ لكل n من I .

2. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

- إذا كانت $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0 فإن حددها العام : $U_n = U_0 + nr$.
- إذا كانت $(U_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_1 فإن حددها العام : $U_n = U_1 + (n-1)r$.
- إذا كانت $(U_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_{n_0} فإن حددها العام : $U_n = U_{n_0} + (n - n_0)r$.

3. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

- إذا كانت $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0 و $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ فإن : $S_n = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$. بتعبير آخر : مجموع n حد أول من متتالية حسابية $S_n = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$.

➤ ملاحظة :

$$S_n = \frac{(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}) \times \text{عدد الحدود}}{2}$$

(ب) المتتاليات الهندسية :

➤ تعريف :

تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث : $U_{n+1} = qU_n$ لكل n من I . العدد q يسمى أساس المتتالية.

➤ خاصيات :

1. خاصية مميزة :

تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ هندسية إذا وفقط إذا كان : $U_{n-1} \times U_{n+1} = (U_n)^2$ لكل n من I

2. الحد العام لمتتالية هندسية :

➤ إذا كانت $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 فإن : $U_n = U_0 q^n$

3. مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

لتكن $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 .

ونعتبر المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

➤ إذا كان $q \neq 1$ فإن : $S_n = U_0 \frac{1-q^n}{1-q}$

➤ إذا كان $q = 1$ فإن : $S_n = nU_0$

ملاحظة :

$$S_n = \frac{(\text{عدد الحدود}) \times (1 - q)}{1 - q} \times \text{الحد الأول}$$

II - نهايات المتتاليات :

1 (تعريف نهاية متتالية - المتتالية المتقاربة :

نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عددية عند $+\infty$. ولدينا أربع حالات ممكنة :

إما أن تكون : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ (حيث : $l \in \mathbb{R}$) أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ أو تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ ليست لها نهاية .

تعريف : نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ متقاربة إذا كانت نهايتها منتهية (أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ حيث : $l \in \mathbb{R}$).

وإذا كان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ أو $(U_n)_{n \in I}$ ليست لها نهاية فإننا نقول إن $(U_n)_{n \in I}$ غير متقاربة أو متباعدة . $(U_n)_{n \in I}$

(2) خاصيات :

نقبل الخاصيات التالية :

1. إذا كان لمتتالية نهاية فإن هذه النهاية وحيدة .
 2. كل متتالية متقاربة وموجبة تكون نهايتها موجبة .
 3. كل متتالية تزايدية ومكبورة هي متتالية متقاربة .
 4. كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة .
- ملاحظة :** الخاصيتان 3 و 4 تبينان فقط أن $(u_n)_{n \in I}$ متقاربة ولا تمكنان من حساب النهاية .

نتيجتين :

- من الخاصيات السابقة نستنتج أن :
- كل متتالية موجبة وتناقصية هي متتالية متقاربة .
 - كل متتالية سالبة وتزايدية هي متتالية متقاربة .

تمارين تطبيقية

- 1 (نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$.
- أ - بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية تزايدية قطعاً ومكبورة .
- ب استنتج أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة .

الحل :

أ - نبين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً :

$$\text{لدينا : } 0 < \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > 0$$

إذن : $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً .

* نبين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ مكبورة :

$$\text{لدينا : لكل } k \text{ من } \{1\} - \mathbb{N}^* \text{ و } \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \text{ و } \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\text{إذن : } u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$u_n = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\text{إذن : } \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : u_n = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

ومنه فإن : $(u_n)_{n \geq 1}$ مكبورة .

ب - استنتج أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة :

لدينا : $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية ومكبورة ؛ إذن : $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة .

- 2 (نعتبر المتتالية $(V_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $V_0 = a > 5$ و $V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n^2 + 1)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ - بين أن $(V_n)_{n \geq 0}$ تزايدية .

ب - بين أن : $V_n > n \Rightarrow n \geq 6$.

ج - ماذا يمكن أن نستنتج ؟

- 3 (نعتبر المتتالية الموجبة (w_n) المعرفة بما يلي : $w_0 = 1$ و $w_{n+1} = \frac{2w_n}{3 + \sqrt{w_n}}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ - احسب w_1 و w_2 .

ب - بين أن (w_n) متتالية تناقصية .

ج - استنتج أن (w_n) متتالية متقاربة .

3 (نهايات المتتاليات المرجعية :

نقبل النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

III - العمليات على نهايات المتتاليات - المتتاليات والترتيب :

1) العمليات على النهايات :

نقبل الخاصيات التالية :

خاصيات :

$(U_n)_{n \in I}$ و $(V_n)_{n \in I}$ متتاليتان مقاربتان و α عدد حقيقي . لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n \times V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \times \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \quad \bullet$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_n}{V_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{V_n} \right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha U_n) = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \quad \bullet$$

توسيع العمليات على نهايات المتتاليات :

نقبل النتائج التالية :

$\lim U_n$	$\lim V_n$	$\lim(U_n + V_n)$	$\lim(U_n \times V_n)$	$\lim \frac{1}{V_n}$	$\lim \frac{U_n}{V_n}$
L	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty (L > 0)$ $-\infty (L < 0)$	0	0
L	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty (L > 0)$ $+\infty (L < 0)$	0	0
$\lim U_n$	$\lim V_n$	$\lim(U_n + V_n)$	$\lim(U_n \times V_n)$	$\lim \frac{1}{V_n}$	$\lim \frac{U_n}{V_n}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد
$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	0	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		
0	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد		
	0			$+\infty$	

تمرين :

احسب النهايات التالية :

$$T_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} \quad ; \quad W_n = n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad ; \quad V_n = \sqrt{n} + \cos n \quad ; \quad U_n = n + (-1)^n$$

2) النهاية والترتيب :

خاصية :

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ و $(v_n)_{n \in I}$ متتاليتين مقاربتين ، و l و l' عددين حقيقيين بحيث : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$.

* إذا كان : $u_n > v_n$ فإن : $l \geq l'$ ؛ * إذا كان : $u_n > 0$ فإن : $l \geq 0$.

IV - مصاديق تقارب متتالية :

أنشطة تمهيدية : (نشاط 7 ص 77 من الكتاب المدرسي : في رحاب الرياضيات)

$$1) \text{ لتكن } (v_n) \text{ المتتالية المعرفة بما يلي : } v_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1} \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{أ - بين أن : } \left| v_n - 2 \right| \leq \frac{1}{n} \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad \text{ب - استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$2) \text{ نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \geq 1} \text{ المعرفة بما يلي : } u_n = \frac{\sin n}{n^2} + 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

أ - بين أن : $1 - \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n^2}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

ب - حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ؛ ثم احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

3 (لتكن المتتالية $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $w_1 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_{n+1} = w_n(1 + w_n)$.
أ - بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_n \geq n$ ؛ استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

نقبل الخصائص التالية :

خصائص :

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية .

1 (إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 و (v_n) متتالية عددية و $l \in \mathbb{R}$ بحيث $\forall n \geq n_0 : |u_n - l| \leq v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$:
فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ متقاربة و $(u_n)_{n \in I}$.

2 (إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 و (v_n) و (w_n) متتاليتين بحيث : $\forall n \geq n_0 : w_n \leq u_n \leq v_n$ و إذا كان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$) فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ متقاربة و $(u_n)_{n \in I}$.

3 (إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 و (v_n) متتالية عددية بحيث : $\forall n \geq n_0 : v_n \leq u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$:
فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4 (إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 و (v_n) متتالية عددية بحيث : $\forall n \geq n_0 : u_n \leq v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$:
فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

ملاحظة :

في مصاديق تقارب متتالية نحصل على نفس النتائج إذا عوضنا الرمز $\leq$ بالرمز $<$.

تطبيقات :

1 (نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + 5$.

أ - بين أن : $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

ب - استنتج أن : $|u_n - 5| < \frac{1}{\sqrt{n}}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

ج - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها .

2 (نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{(-1)^n + n^2}{n^2 + \sin(\sqrt{n}) + 3}$.

أ - بين أن : $\frac{n^2 + 1}{n^2 + 4} \leq u_n \leq \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$: $\forall n \in \mathbb{N}$.

ب - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها .

3 (نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\forall n \geq 3 : u_n = \frac{(-1)^n + n^2}{n - 2}$.

أ - تحقق أن : $u_n \geq \frac{n^2 - 1}{n}$: $\forall n \geq 3$.

ب - استنتج تقارب المتتالية (u_n) واحسب نهايتها .

4 (نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\forall n \geq 0 : u_n = \frac{\sin n - n}{\sqrt{n} + 2}$.

أ - تحقق أن : $u_n \leq -\sqrt{n} + 2$: $\forall n \geq 0$. ب - استنتج تقارب المتتالية (u_n) واحسب نهايتها .

V - متتاليات خاصة :

1) نهاية المتتالية $(q^n)_{n \geq 0}$:

نعتبر المتتالية الهندسية $(q^n)_{n \geq 0}$ حيث q عدد حقيقي . هناك أربع حالات : $q > 1$ أو $q = 1$ أو $-1 < q < 1$ أو $q \leq -1$.
نقبل الخاصية التالية :

➤ إذا كان : $q > 1$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

➤ إذا كان : $q = 1$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

➤ إذا كان : $-1 < q < 1$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

➤ إذا كان : $q \leq -1$ فإن $(q^n)_{n \geq 0}$ ليست لها نهاية .

تطبيقات : احسب نهايات المتتاليات التالية :

$$w_n = \frac{1}{(0.001)^n} \quad ; \quad V_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} \quad ; \quad U_n = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n$$

2) نهاية المتتالية $(n^\alpha)_{n \geq 0}$ حيث $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

نعتبر المتتالية $(n^\alpha)_{n \geq 0}$ حيث $\alpha \in \mathbb{Q}^*$.

إذا كان : $\alpha > 0$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$.

إذا كان : $\alpha < 0$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$.

أمثلة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ؛ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ ؛ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ؛ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

4) المتتاليات من نوع $U_{n+1} = f(U_n)$:

مثال : نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي : $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = \frac{4U_n - 1}{U_n + 2}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بما يلي : $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$.

1. بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا هو $x = 1$.

2. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة ب : $V_n = U_n - 1$.

أ - بين أن المتتالية (V_n) لا تنعدم وأن $\left(\frac{1}{V_n} \right)$ متتالية حسابية وحدد أساسها وحددها الأول .

ب - بين أن نهاية (U_n) هي 1 .

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

$(U_n)_{n \in I}$ متتالية معرفة بالعلاقة : $U_{n+1} = f(U_n)$ بحيث f دالة متصلة على مجال J من $\mathbb{R}$ و $f(J) \subset J$.

إذا كانت $(U_n)_{n \in I}$ متقاربة فإن نهايتها هي حل المعادلة $f(l) = l$.

تمرين تطبيقي : نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{5}{2}U_n(1 - U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1. مثل مبيانيا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{5}{2}x(1 - x)$.

2. نعتبر المجال : $J = \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8} \right]$. بين أن : $f(J) \subset J$.

3. بين أن المتتالية (U_n) متقاربة وحدد نهاية المتتالية (U_n) .