

**مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا**  
**(مسلك علوم الحياة و الأرض و العلوم الفيزيائية و العلوم الزراعية)**

| محتوى الدرس                                                                                                                                                                                                                                 | القدرات المنتظرة                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | المكتسبات السابقة                                                                                                                                                                         | الامتدادات                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>نهاية متتالية</li> <li>نهاية المتتاليات</li> <li>المرجعية</li> <li>تقارب متتالية</li> <li>العمليات على النهايات</li> <li>النهايات والترتيب</li> <li>مصاديق التقارب</li> <li>متتاليات خاصة</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>استعمال المتتاليات المرجعية و الهندسية و الحسابية في دراسة أمثلة لمتتاليات من الشكل <math>u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}</math> و <math>u_{n+1} = au_n + b</math></li> <li>استعمال المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب في النهايات</li> <li>تحديد نهاية متتالية من الشكل <math>f(I) \subset I</math> حيث <math>u_{n+1} = f(u_n)</math> و <math>f</math> دالة متصلة على مجال <math>I</math></li> <li>استعمال نهاية متتالية في حل مسائل من مجالات مختلفة</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>نهايات الدوال العددية</li> <li>المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية</li> <li>رتابة متتالية</li> <li>متتالية مكبورة ومصغورة ومحدودة</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>دراسة</li> <li>وضعية</li> <li>مقطعة من مجالات</li> <li>مختلفة</li> </ul> |

### 1. نهاية المتتاليات المرجعية

**تمرين تمهيدى :** أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^6} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على  $\mathbb{N}$  أو جزء من  $\mathbb{N}$  فإننا نحصل على نتائج مشابهة :  
**خاصية :**

المتتاليات المرجعية :  $(n)$  و  $(n^2)$  و  $(n^3)$  و  $(\sqrt{n})$  و  $(n^p)$  حيث  $p \in \mathbb{N}$  و  $p \geq 4$

تؤول الى  $+\infty$  عندما تؤول  $n$  الى  $+\infty$

$$\text{ونكتب : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

المتتاليات المرجعية :  $\left(\frac{1}{n}\right)$  و  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$  و  $\left(\frac{1}{n^3}\right)$  و  $\left(\frac{1}{n^p}\right)$  و  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  حيث  $p \in \mathbb{N}$  و  $p \geq 4$   
تؤول الى 0 عندما تؤول  $n$  الى  $+\infty$

ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

**تمرين تطبيقي :** أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^9} + 13 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5$$

## II. تقارب متتالية

لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية

- نقول إن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية  $l$
- نقول إن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة إذا كانت غير متقاربة أي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  أو  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  أو  $(u_n)$  ليس لها نهاية

**مثال :** حدد من بين المتتاليات التالية المتتاليات المتقاربة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{n}} - 4n \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3} + \frac{3}{n} + 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n} + 5n$$

**خاصية :** لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية و  $l$  عددا حقيقيا

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  يعني  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - l = 0$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$  يعني  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{u_n}$

(1) أحسب  $u_2$  و بين أن  $u_n \neq 0$   $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) أحسب  $v_{n+1} - v_n$  و استنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

(3) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

(4) استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

(5) حسب النهايات التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

## III. العمليات على النهايات

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين و  $l$  و  $l'$  و  $\alpha$  أعدادا حقيقية  
العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

### 1. الجمع و الضرب :

|                    |          |           |           |           |           |              |
|--------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| $\lim u_n$         | $l$      | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$    |
| $\lim v_n$         | $l'$     | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$    |
| $\lim (u_n + v_n)$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | شكل غير محدد |

|                         |               |           |           |           |           |           |           |           |              |
|-------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| $\lim u_n$              | $l$           | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\infty$     |
| $\lim v_n$              | $l'$          | $l > 0$   | $l < 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | 0            |
| $\lim (u_n \times v_n)$ | $l \times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | شكل غير محدد |

## 2. المقلوب:

|                      |               |           |           |           |           |
|----------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim u_n$           | $l \neq 0$    | $0^+$     | $0^-$     | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim \frac{1}{u_n}$ | $\frac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$     | $0^-$     |

## 3. الخارج:

|                        |                |           |           |           |           |           |          |              |              |
|------------------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|--------------|--------------|
| $\lim u_n$             | $l$            | $l > 0$   | $l < 0$   | $l > 0$   | $-\infty$ | $l < 0$   | $l$      | $\infty$     | 0            |
| $\lim v_n$             | $l' \neq 0$    | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $l < 0$   | $-\infty$ | $\infty$ | $\infty$     | 0            |
| $\lim \frac{u_n}{v_n}$ | $\frac{l}{l'}$ | $0^+$     | $0^-$     | $0^-$     | $+\infty$ | $0^+$     | 0        | شكل غير محدد | شكل غير محدد |

**مثال** : أحسب النهاية التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$

**تمرين** : أحسب النهايات التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n^2}}$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1}$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - 3}{3n + 5}$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n + 2} - \sqrt{n} , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1)^2 - (n - 1)^2 , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}$$

## ملاحظة:

- ❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- ❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

**تمرين:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 2}$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \geq 2 \begin{cases} u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) u_n \\ u_2 = 1 \end{cases}$$

(2) بين بالترجع أن  $\forall n \geq 2 \quad u_n = \frac{n(n-1)}{2}$

(3) استنتج :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

1. أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2. استنتج :  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n + 2(-1)^n$

## IV. النهايات والترتيب

### خاصية

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين متقاربتين و  $l$  و  $l'$  عددين حقيقيين بحيث  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$

• إذا كانت :  $u_n \geq v_n$  فان :  $l \geq l'$

• إذا كان :  $u_n > 0$  فان :  $l \geq 0$

**تمرين:** تكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين بحيث :  $u_n = 3 - \frac{1}{n}$  و  $v_n = 3 + \frac{1}{n}$   $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. بين بالترجع أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < v_n$

2. قارن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

## V. مصاديق التقارب

### خاصية

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين و  $l$  و  $\alpha > 0$  عددين حقيقيين بحيث

إذا كانت :  $\forall n \geq p \quad |v_n - l| \leq \alpha u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  فان : المتتالية  $(v_n)$  متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

**خاصية:** لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متتاليات عددية

إذا كانت :  $\forall n \geq p \quad w_n < u_n < v_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  فان : المتتالية  $(u_n)$  متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

**مثال:** أحسب النهاية التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$

**تمرين:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3}$$

بين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

**تمرين:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n(3 - \sin n)}$$

بين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

**خاصية:** لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين و  $\alpha > 0$  عدد حقيقي بحيث

▪ إذا كانت :  $\forall n \geq p \quad v_n \geq \alpha u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  فان :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

▪ إذا كانت :  $\forall n \geq p \quad v_n \leq \alpha u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  فان :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

**مثال :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = n+1+(-1)^n$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2$

1. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geq \frac{4}{3}n^2$

2. استنتج :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3n + 5 \sin n$

1. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geq 3n - 5$

2. استنتج :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -4n + 3 \cos n$

1. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq -4n + 3$

2. استنتج :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

### خاصية:

1. كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة
2. كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة

### ملاحظة :

1. كل متتالية تزايدية و سالبة هي متقاربة
2. كل متتالية تناقصية و موجبة هي متقاربة

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

1. بين أن  $0 \leq u_n \leq 1$   $\forall n \in \mathbb{N}$

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

3. ماذا نستنتج؟

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

1. بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية و مصغورة

2. ماذا نستنتج؟

## VI. متتاليات خاصة

(أ) **نهاية المتتالية  $(a^n)$**

**خاصية:** ليكن  $a$  عددا حقيقيا

1. إذا كان :  $a > 1$  فان :  $(a^n)$  تؤول إلى  $+\infty$

2. إذا كان :  $a = 1$  فان :  $(a^n)$  تؤول إلى 1

3. إذا كان :  $-1 < a < 1$  فان :  $(a^n)$  تؤول إلى 0

4. إذا كان :  $a \leq -1$  فان : المتتالية  $(a^n)$  ليست لها نهاية

**أمثلة :** [حسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$$

**تمرين :** أحسب النهايات التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n}$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$  ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n + (2)^n$$

**(ب) تقارب المتتالية**  $(v_n)$  بحيث  $v_n = f(u_n)$

**خاصية:** لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين

إذا كانت :  $(u_n)$  متتالية مقاربة نهايتها  $l$  و  $f$  دالة متصلة في  $l$  فإن : المتتالية  $(v_n)$  بحيث  $v_n = f(u_n)$  مقاربة و نهايتها  $f(l)$

**مثال :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $v_n = \cos\left(\frac{(0,1)^n + \pi}{(0,1)^n + 4}\right)$  أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**(ج) نهاية المتتالية**  $(n)^\alpha$  حيث  $\alpha \in \mathbb{Q}$

• إذا كان :  $\alpha > 0$  فإن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^\alpha = +\infty$

• إذا كان :  $\alpha < 0$  فإن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^\alpha = 0$

**مثال :** أحسب النهايات التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^{\frac{4}{3}}$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^{\frac{6}{7}}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^{\frac{3}{5}} - (n)^{\frac{1}{3}} + 4$

**خاصية:**  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين

لتكن  $f$  دالة متصلة علي مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  بحيث  $f(I) \subset I$

المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بحددها الأول من  $I$  و العلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$

إذا كانت :  $(u_n)$  متتالية مقاربة فإن : نهايتها  $l$  حل للمعادلة :  $f(x) = x$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$  و  $u_0 = 2$  و  $\forall n \in \mathbb{N}$

1. بين أن  $0 \leq u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  مقاربة

3. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب :  $f(x) = \sqrt{x+6}$  على المجال  $I = [0, 3]$

(أ) بين أن  $f(I) \subset I$  و أن  $f$  دالة متصلة علي مجال  $I$

(ب) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$  و  $u_0 = 4$  و  $\forall n \in \mathbb{N}$

1. بين بالترجع أن  $u_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  مقاربة وأحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$  و  $u_0 = \frac{5}{4}$  و  $\forall n \in \mathbb{N}$

1. بين أن  $u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  مقاربة

3. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب :  $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$  على المجال  $I = ]-\infty; 2]$

(أ) بين أن  $f(I) \subset I$  و أن  $f$  دالة متصلة علي مجال  $I$

(ب) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7}$  و  $u_0 = \frac{7}{3}$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4. بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq 1$

5. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة

6. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية

7. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

8. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

9. أحسب النهايات التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{1-u_n^2}$  و  $u_0 = \frac{1}{2}$  و  $\forall n \in \mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  و  $\forall n \in \mathbb{N}$

10. بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 1$

11. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة

12. بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$

13. استنتج أن  $1 - u_n \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^n$

14. أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### ملاحظة :

- نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.