

الجزءية
محصلة

2012

الإتصال و النهايات



- الحصة رقم 1
- 6..... I. الإتصال في نقطة
- 6..... 1. نشاط
- 6..... 2. حل
- 6..... 1. من خلال الشكل حيز تعريف الدالة f هو المجال : $[-2,2]$.
- 6..... 3. تعريف الإتصال في نقطة
- 6..... 4. تعريف الإتصال على اليمين - الإتصال على اليسار
- 6..... 5. تمرين تطبيقي 1
- 7..... 6. الحل
- الحصة رقم 2
- 8..... 7. دالة الجزء الصحيح
- 8..... a. تعريف
- 8..... b. أمثلة
- 8..... c. التمثيل المباني للدالة الجزئ الصحيح
- 8..... d. نتائج
- الحصة رقم 3
- 9..... II. الإتصال على مجال
- 9..... 1. نشاط
- 9..... 2. الحل
- 9..... 3. تعريف
- 9..... 4. ملاحظة
- 10..... 5. تمرين
- 10..... 6. الحل
- 10..... 7. اتصال الدوال الإعتيادية
- الحصة رقم 4
- 11..... III. صورة مجال بدالة متصلة
- 11..... 1. مثال 1
- 11..... 2. مثال 2
- 13..... 3. مثال 3
- 13..... 4. تمرين تطبيقي
- 14..... 5. الحل
- 14..... 6. استنتاج
- 14..... 7. حالة دالة متصلة ورتيبة قطعاً
- 14..... 8. خاصية
- 14..... 9. مثال مضاد
- 14..... 10. الحل

15.....	الحصة رقم 5	
15.....	11. تمرين	
15.....	12. الحل	
15.....	IV. اتصال مركب دالتين	
15.....	1. تطبيق 1	
15.....	2. الحل 1	
15.....	3. خاصية	
16.....	4. برهان	
17.....	الحصة رقم 6	
17.....	V. مبرهنة القيم الوسيطة	
17.....	1. مبرهنة	
17.....	2. خاصية	
17.....	3. نتيجة 1	
17.....	4. تطبيق	
17.....	5. الحل	
18.....	6. تمرين	
18.....	7. الحل	
19.....	الحصة رقم 7	
19.....	VI. طريقة التفرع الثنائي لتأطير حلول المعادلة $f(x)=0$	
19.....	1. نشاط	
19.....	1. الحل	
19.....	2. التجربة	
20.....	الحصة رقم 8	
20.....	VII. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال	
20.....	1. خاصية	
20.....	2. تعريف	
20.....	3. نتائج	
20.....	4. خاصيت الدالة العكسية	
20.....	5. تمرين	
20.....	6. الحل	
23.....	الحصة رقم 9	
23.....	VIII. دالة الجذر من الرتبة n	
23.....	1. تمهيد	
23.....	2. تعريف	
23.....	3. نتائج	
23.....	4. العمليات على الجذور من الرتبة n	

5. مركب دالة f و دالة الجذر من الرتبة n 23
6. تمرين : معادلات و متراجحات لا جذرية 23
7. الحل 23
- الحصة رقم 10 25
- IX. القوى الجذرية x^r ($r \in \mathbb{Q}^*$) لعدد حقيقي موجب قطعاً 25
1. تعريف 25
2. مثال 25
3. تمرين : مقارنة و تبسيط أعداد تحتوي على $\sqrt[n]{}$ 25
4. الحل 25
5. تمرين 26
6. الحل 26
- X. سلسلة تمارين 26
- تمرين تطبيقي 2 26
- ملاحظة : قصور دالة 26
- حل 26
- تمرين تطبيقي 3 27
- الحل 27

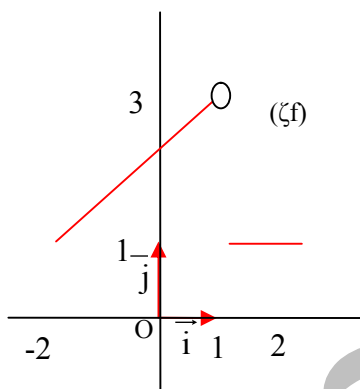
الإتصال و النهايات

الحصة رقم 1

I. الإتصال في نقطة

1. نشاط

لتكن f الدالة العددية التي تمثيلها المباني هو التالي:



1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(1)$
3. أحسب $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$
4. ماذا تستنتج بخصوص اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$ ؟

2. حل

1. من خلال الشكل حيز تعريف الدالة f هو المجال: $[-2, 2]$.
2. لدينا: $f(-2)=1$ و $f(0)=3$ و $f(1)=1$
3. لدينا $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1$
4. نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1 = f(1)$ و منه f دالة متصلة على اليمين في النقطة $x_0=1$
و أن $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 3 \neq f(1)$ و منه f دالة غير متصلة على اليسار في النقطة $x_0=1$
خلاصة إن الدالة f غير متصلة في النقطة $x_0=1$.

3. تعريف الإتصال في نقطة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I .
نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

4. تعريف الإتصال على اليمين - الإتصال على اليسار

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0, x_0+h]$ حيث $h>0$.
نقول إن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$
لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0-h, x_0]$ حيث $h>0$.
نقول إن الدالة f متصلة على اليسار في النقطة x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$

5. تمرين تطبيقي 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos(x) - x\sin(3x) - 1}{x^2}; & x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$.

6. الحل

لدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{\cos(x) - x\sin(3x) - 1}{x^2}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{x^2} - \frac{\sin 3x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2} \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ إذن}$$

و منه فإن f دالة متصلة في $x_0=0$.

الحصة رقم 2

7. دالة الجزء الصحيح

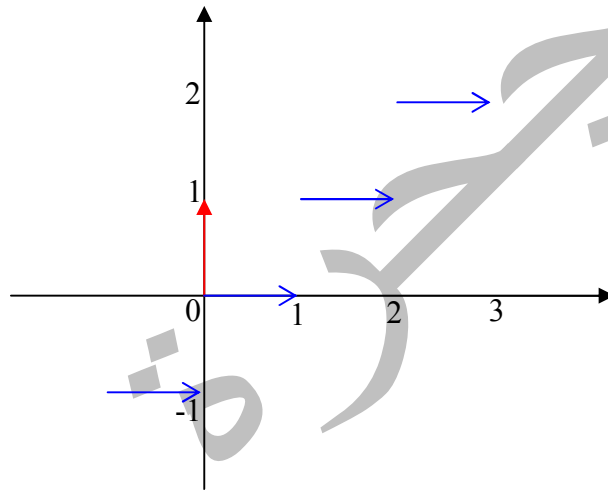
a. تعريف

دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد n الذي يحقق $n \leq x < n+1$. نرسم لصورة x بهذه الدالة بالرمز $E(x)$.

b. أمثلة

x	2,3	-5,6	7	0	$\sqrt{2}$	-3	13/7
$E(x)$	2	-6	7	0	1	-3	1

c. التمثيل المبياني للدالة الجزء الصحيح



d. نتائج

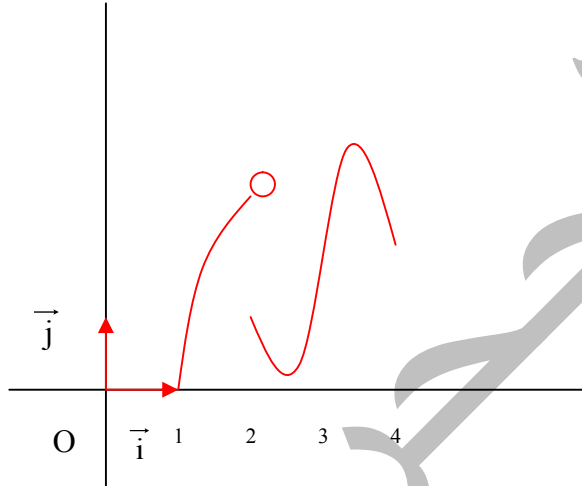
لكل n من $\mathbb{Z}$ لدينا:
دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في n و غير متصلة على اليسار في n
دالة الجزء الصحيح متصلة على المجال $[n, n+1[$
دالة الجزء الصحيح غير متصلة في n .

الحصة رقم 3

II. الإتصال على مجال

1. نشاط

نعتبر في الشكل أسفله منحنى دالة عددية f معرفة على المجال $[1,4]$.



- (1) أدرس اتصال الدالة f على اليمين و على اليسار في 2
- (2) هل الدالة f متصلة في كل نقطة من a من المجال $[1,4]$ ؟ ماذا تستنتج؟
- (3) لندرس اتصال الدالة f على المجال $[2,4]$ متبعين الخطوات التالية :
 - a. هل الدالة f متصلة على المجال $[2,4]$ ؟
 - b. هل الدالة f متصلة على اليمين في 2 ؟
 - c. هل الدالة f متصلة على اليسار في 4 ؟
 - d. ماذا تستنتج بخصوص اتصال الدالة f على المجال $[2,4]$ ؟

2. الحل

- (1) لدينا $f(2)=1$ و $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 3$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ إذن f دالة متصلة على اليمين في النقطة 2. و $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \neq f(2)$ إذن f دالة غير متصلة على اليسار في النقطة 2.
- (2) الدالة f غير متصلة في النقطة 2 من المجال $[1,4]$ ، و منه نستنتج أن f غير متصلة على المجال $[1,4]$.
- (3)
 - a. على المجال $[2,4]$ الدالة f متصلة (لأنه تم إنشاء (f) دون تقطع)
 - b. الدالة f متصلة على اليمين في 2 لأن: $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$
 - c. الدالة f متصلة على اليسار في 4 لأن $\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 2 = f(4)$ (أنظر الشكل)
 - d. من (a) و (b) و (c) نستنتج أن الدالة f متصلة على المجال $[2,4]$.

3. تعريف

نقول إن الدالة f متصلة على مجال مفتوح I إذا كانت متصلة في كل عنصر من I .
 نقول إن الدالة f متصلة على مجال $[a,b]$ إذا كانت متصلة في كل عنصر من المجال المفتوح $]a,b[$ و متصلة على اليمين في النقطة a و متصلة على اليسار في النقطة b .

4. ملاحظة

نعرف بالمثل اتصال دالة على كل من المجالات $[a,b]$ و $]a,b[$ و $[a,+\infty[$ و $]-\infty,a]$.

5. تمرين

لتكن h الدالة المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي:

$$\begin{cases} h(x) = 3x^2 - x - \frac{1}{4} ; & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ h(x) = 1 - \frac{7}{6x+4} ; & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

بين أن الدالة h متصلة على المجال $[0,1]$.

6. الحل

الدالة $x \rightarrow 3x^2 - x - \frac{1}{4}$ متصلة على $\mathbb{R}$ (كدالة حدودية) و بالخصوص على المجال $[0, 1/2]$.

الدالة $x \rightarrow 1 - \frac{7}{6x+4}$ متصلة على $\mathbb{R} - \{-2/3\}$ (كدالة جذرية متصلة على حيز تعريفها) و بالخصوص فهي متصلة على المجال $[1/2, 1]$

يبقى أن ندرس اتصال الدالة h على اليسار في النقطة $x_0 = 1/2$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 3x^2 - x - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{و} \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{7}{\left(6 \times \frac{1}{2}\right) + 4} = 0$$

و منه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} h(x) = h\left(\frac{1}{2}\right)$ وهذا يعني أن h دالة متصلة على اليسار في النقطة $x_0 = 1/2$.

نستنتج إذن أن h متصلة على المجال $[0,1]$.

7. اتصال الدوال الإعتيادية

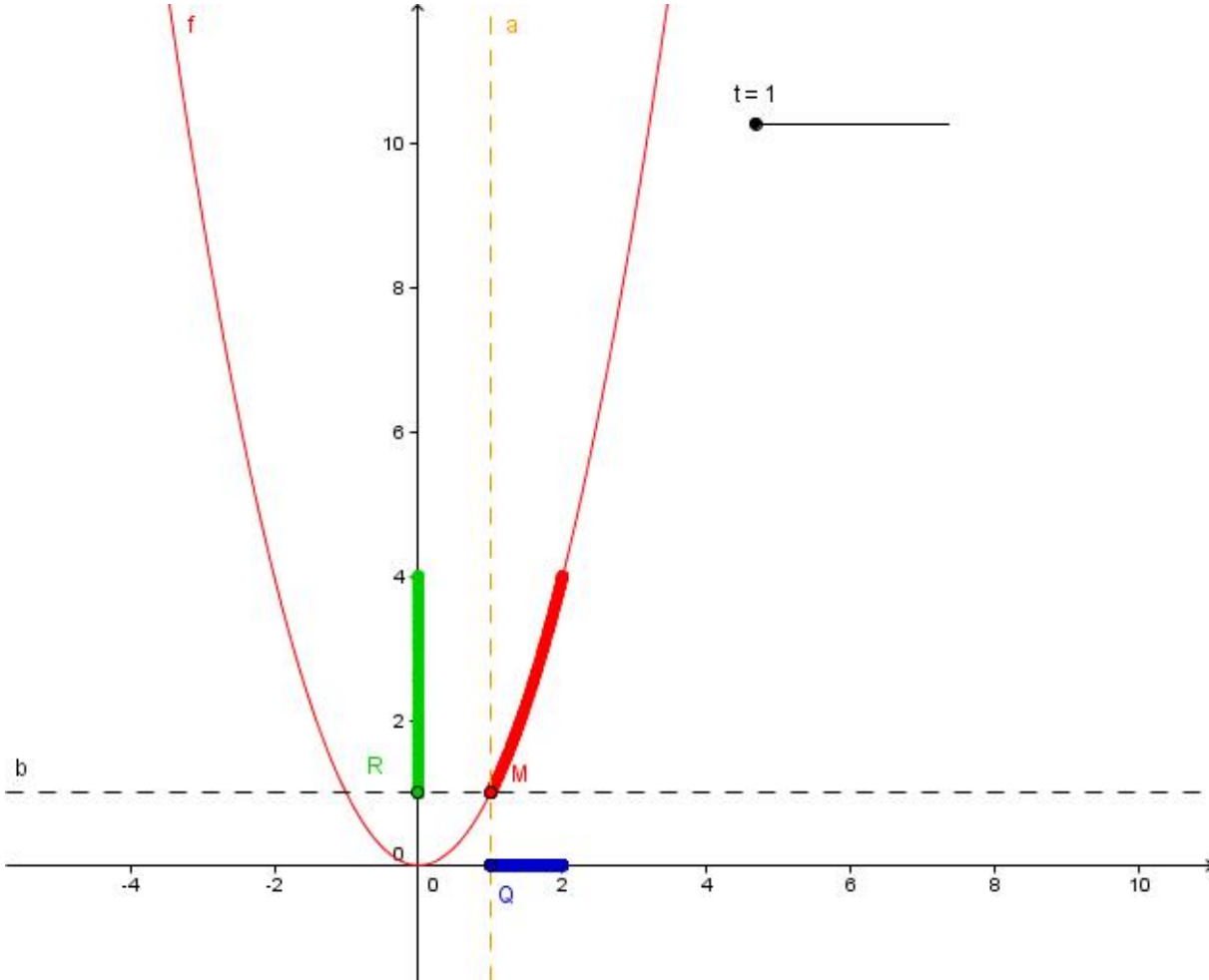
الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدوال $\sqrt{x}$ و $x \rightarrow \cos x$ و $x \rightarrow \sin x$ متصلة على كل مجال ضمن حيز تعريفها.

الحنة رقم 4

.III صورة مبال بدلالة مبال

1. مثال 1

نضع $f(x) = x^2$ لنحدد صورة المبال $I = [1; 2]$

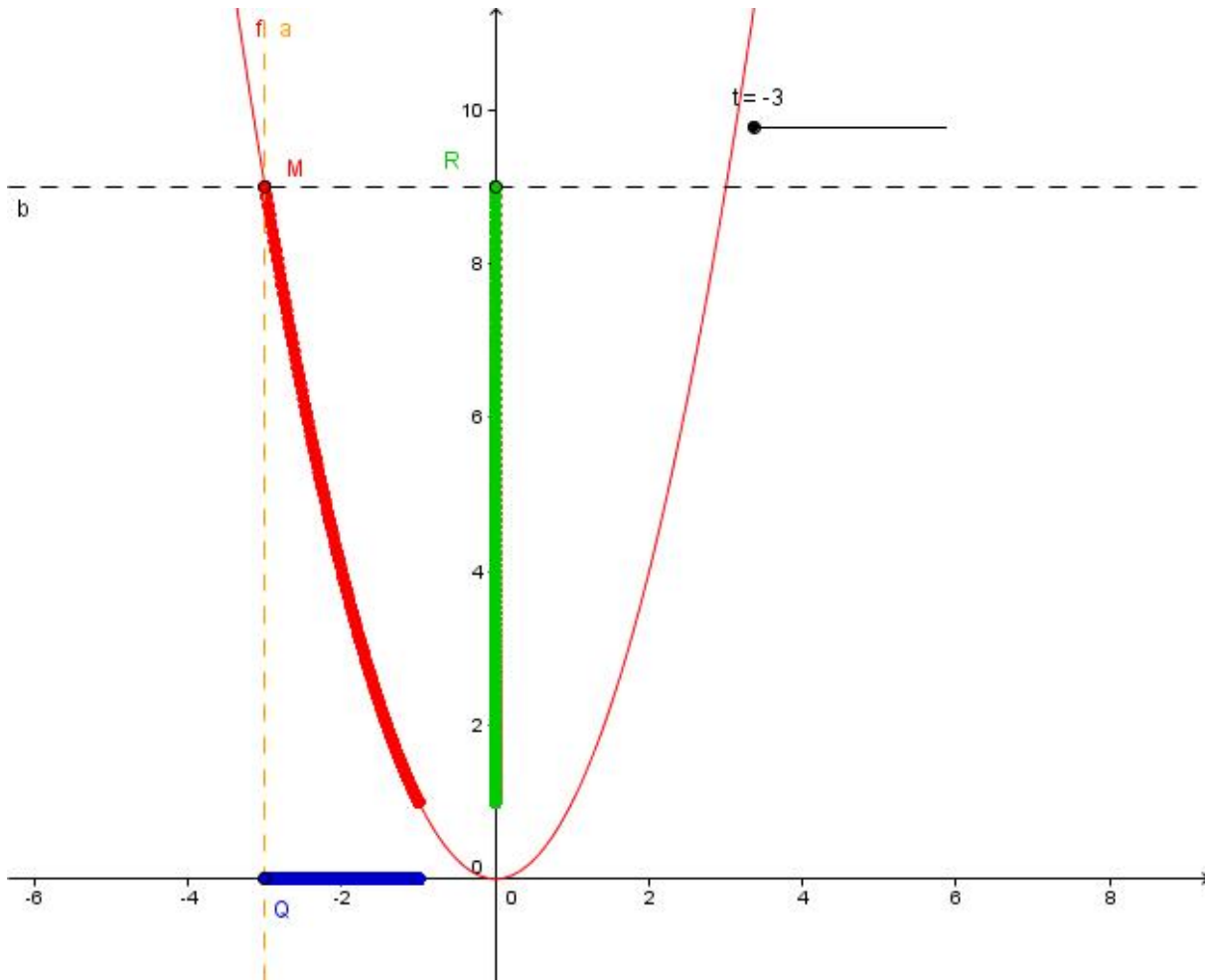


[اضغط هنا](#)

نستنتج أن $f(I) = [1; 4] = [f(1); f(2)]$ وذلك لأن الدالة f تزايدية على المبال $I = [1; 4]$

2. مثال 2

نضع $f(x) = x^2$ لنحدد صورة المبال $J = [-3; -1]$

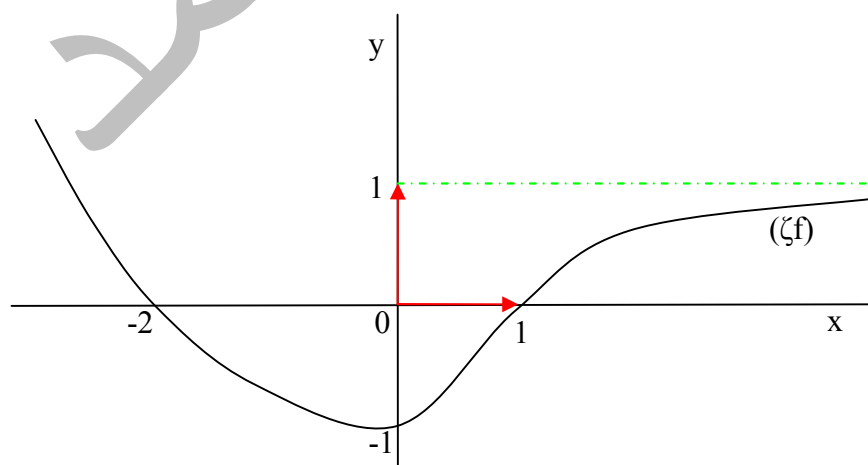


نستنتج أن $f(J) = [1; 9] = [f(-3); f(-1)]$ وذلك لأن الدالة f تناقصية قطعاً على المجال $J = [-3; -1]$
[اضغط هنا](#)

محرم

حيث $m=0$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال $[0; 4]$
و $M=4$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال $[0; 4]$

ليكن (f) منحنى دالة f معرفة على $\mathbb{R}$.



حدد صور المجالات التالية بالدالة f:
 $[-2; 0]$ و $[0; +\infty[$ و $]-\infty; 1]$

5. الحل

لدينا :

$$\begin{aligned} f([-2, 0]) &= [-1, 0] \\ f([0, +\infty[) &= [-1, 1[\\ f(]-\infty, 1]) &= [-1, +\infty[\end{aligned}$$

6. استنتاج

إذا كانت f دالة متصلة على المجال $[a, b]$ فإن:

$$f([a, b]) = [m, M]$$

حيث m هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال $[a, b]$.
 و M هي القيمة القصوى للدالة f على المجال $[a, b]$.

7. حالة دالة متصلة ورتيبة قطعاً

المجال $f(I)=J$	المجال I	رتابة الدالة f
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	f دالة تزايدية قطعاً على I
$[f(a), \lim_{x \rightarrow b-} f(x)]$	$[a, b[$	
$[\lim_{x \rightarrow a+} f(x), f(b)]$	$]a, b]$	
$[\lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow b-} f(x)]$	$]a, b[$	
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	f دالة تناقصية قطعاً على I
$[\lim_{x \rightarrow b-} f(x), f(a)]$	$]a, b[$	
$[f(b), \lim_{x \rightarrow a+} f(x)]$	$]a, b]$	
$[\lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow b-} f(x)]$	$]a, b[$	

8. خاصية

صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
 صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

9. مثال مضاد

حدد J صورة المجال $[0, 2[$ بالدالة E (دالة الجزئ الصحيح) ؟ هل J مجال؟

10. الحل

لدينا : $E([0, 2[) = \{0, 1\}$ وهو ليس بمجال ومنه دالة الجزئ الصحيح ليست متصلة لأنه لو كانت متصلة لكان صورة مجال أيضاً مجال. أنظر الخاصية 4

الحصة رقم 5

11. تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{3x+4}{2x+1}$

حدد مجموعة تعريف الدالة f و ادرس رتبة f على المجال $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

حدد صورة المجال $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ بالدالة f .

12. الحل

لدينا $Df =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

لدينا : $f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{(2x+1)^2} = \frac{-5}{(2x+1)^2} < 0$ وذلك لكل x من Df . و بالخصوص لكل x من $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

إذن f دالة تناقصية قطعاً المجال $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

نسنتج إذن أن:

$$f\left(]-\infty, -\frac{1}{2}[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$$

$$= \left[-\infty, \frac{3}{2} \right[$$

وذلك لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$

IV. اتصال مركب دالتين

لتكن f و g دالتين عدديتين
إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث $f(I)$ ضمن J فإن الدالة $g \circ f$ متصلة على I .

1. تطبيق

بين أن الدالة العددية g المعرفة بـ $g(x) = \cos(x^2 + 7x)$ متصلة على $\mathbb{R}$.

2. الحل

الدالة g عبارة عن تركيب دالتين : $g = (\cos) \circ u$ أي $x \xrightarrow{u} x^2 + 7x \xrightarrow{\cos} \cos(x^2 + 7x)$

الدالة u متصلة على $\mathbb{R}$ كدالة حدودية

الدالة $\cos$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $u(\mathbb{R})$ الذي هو ضمن $\mathbb{R}$

إذن g متصلة على $\mathbb{R}$.

3. خاصية

لتكن f دالة متصلة و موجبة على مجال I

فإن الدالة g المعرفة بـ $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متصلة على I .

4. برهان

الدالة g هي تركيب الدالتين f و $u: X \rightarrow \sqrt{x}$
لدينا f متصلة على المجال I و الدالة u متصلة على $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ و حيث $f(I) \subset]0, +\infty[$ لأن f دالة موجبة
على I فإن الدالة $g = u \circ f$ متصلة على المجال I .

الحصة رقم 6

V. مبرهنة القيم الوسيطة

1. مبرهنة

نعلم أنه إذا كانت f دالة متصلة على المجال $[a, b]$ فإن:

$$f([a, b]) = [m, M]$$

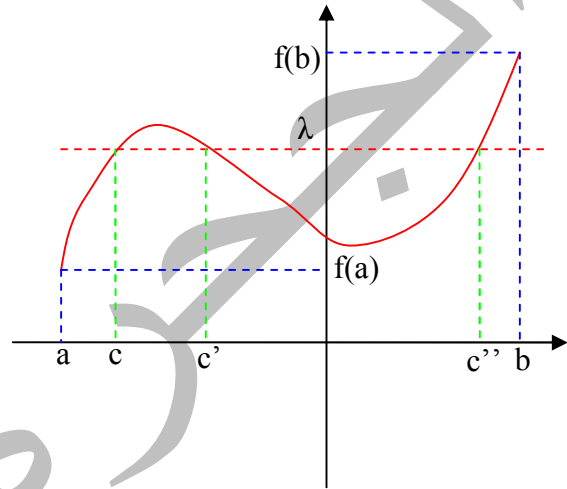
و منه لكل λ من $[m, M]$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من $[a, b]$ بحيث : $f(c) = \lambda$

2. خاصية

إذا كانت f متصلة على المجال $[a, b]$ فإن لكل عدد حقيقي λ بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c من $[a, b]$ بحيث

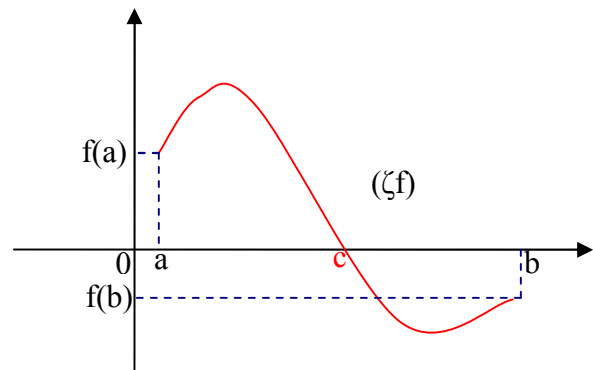
$$f(c) = \lambda$$

الشكل:



3. نتيجة 1

إذا كانت f متصلة على المجال $[a, b]$ و كان $f(a) \cdot f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a, b]$.
الشكل :



4. تطبيق

بين أن المعادلة $\cos(x) = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $I = [0, \pi]$

5. الحل

$$f(x) = \cos(x) - x$$

الدالة f متصلة على المجال I كمجموع دالتين متصلتين على I

$$f(0) = 1 > 0 \text{ و } f(\pi) = -1 - \pi < 0 \text{ إذن } f(0) \cdot f(\pi) < 0$$

بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ أي المعادلة $\cos(x) = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $I = [0, \pi]$

6. تمرين

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = \sin x + 2 \cos(x)$
تحقق من أن $g(0) > 0$ وأن $g(\pi/2) < \pi/2$
اثبت أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0, \pi/2]$.

7. الحل

التحقق :

$$g(0) = 2 > 0 \text{ و } g(\pi/2) = 1 < \pi/2$$

$$\text{نضع } h(x) = g(x) - x \text{ أي } h(x) = \sin x + 2 \cos(x) - x$$

الدالة h متصلة $\mathbb{R}$ كمجموع دوال متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتالي h متصلة على المجال $[0, \pi/2]$

$$\text{و لدينا } h(0) \times h(\pi/2) < 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0, \pi/2]$

أي أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0, \pi/2]$

الحصة رقم 7

VI. طريقة التفرع الثنائي لتأطير حلول المعادلة $f(x)=0$.

1. نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^3+x+1$
تحقق أن f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ وأن $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.
استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$.
أحسب $f(0)$ و $f(-1)$ ثم استنتج أن $\alpha \in]-1, 0[$
أحسب $f(-1/2)$
هل α ينتمي إلى المجال $]-1, -1/2[$ أم إلى المجال $]-1/2, 0[$ ؟ علل جوابك؟
حدد إشارة صورة مركز المجال $]-3/4, -1/2[$ ؟
استنتج أن : $-0,75 < \alpha < -0,625$ ؟
ما هي الدقة التي تم بها تأطير العدد α ؟

1. الحل

الدالة المعرفة بـ $f(x)=x^3+x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$ كدالة حدودية
ولدينا $f'(x)=3x^2+1 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و منه f دالة تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$
و
$$f(\mathbb{R}) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$$
$$=]-\infty, +\infty[$$
$$= \mathbb{R}$$

الدالة f متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$ إذن حسب ميرهنة القيم الوسيطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$.
 $f(0)=1$ و $f(-1)=-1$ إذن حسب م ق و $\alpha \in]-1, 0[$
 $f(-1/2)=3/8$
لدينا $f(-1) \times f(-1/2) < 0$ إذن حسب م ق و $\alpha \in \left] -1, -\frac{1}{2} \right[$
مركز المجال $\left] -1, -\frac{1}{2} \right[$ هو $-3/4$ و $f(-3/4)=-11/64 < 0$
لدينا $f(-3/4) < 0$ و $f(-1/2) > 0$ إذن حسب م ق و لدينا $\alpha \in \left] -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right[$
و مركز المجال $\left] -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right[$ هو $-5/8$ و $f(-5/8)=67/512 > 0$ و $f(-3/4)=-11/64 < 0$ إذن حسب م ق و فإن
 $\alpha \in \left] -\frac{3}{4}, -\frac{1}{8} \right[$ أي $-0,75 < \alpha < -0,625$
دقة هذا التأطير هي : 0,125.

2. التجربة

تجربة بواسطة الحاسوب لتأطير العدد α إلى الدقة r المرغوب فيها

الحصة رقم 8

VII. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال

1. خاصية

إذا كانت f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I فإن لكل y من $f(I)$ المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I

2. تعريف

لتكن f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I . وليكن J صورة المجال I بالدالة f ($f(I)=J$) الدالة التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x)=y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f . و نرمز لها بالرمز f^{-1} .

3. نتائج

لتكن f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I . و لتكن f^{-1} دالتها العكسية، نضع $J=f(I)$ لدينا:

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(\forall x \in I) \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$(\forall x \in J) \quad f \circ f^{-1}(x) = x$$

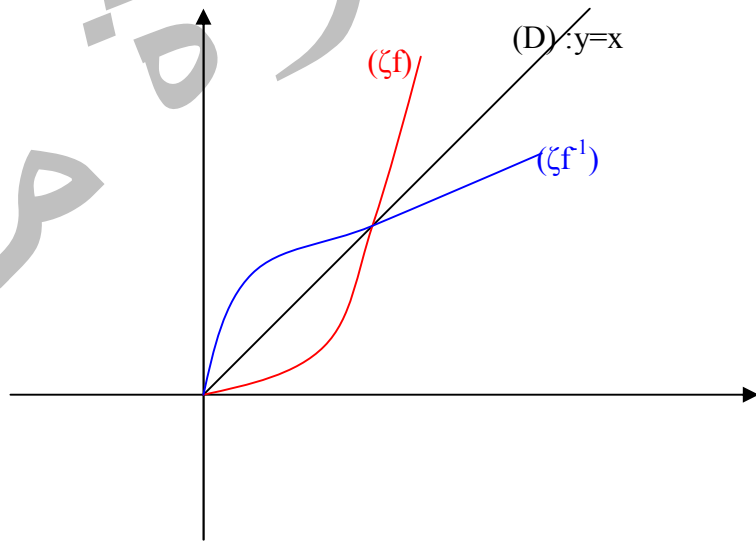
4. خاصيت الدالة العكسية

إذا كانت f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية فإن:

f^{-1} متصلة على المجال J .

f^{-1} رتيبة قطعاً على المجال J و لها نفس رتبة f على المجال I .

منحنى الدالة f^{-1} هو مائل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ في معلم متعامد ممنظم الشكل:



5. تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{2x-1}$

بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده

حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

انشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (ζf) و (ζf^{-1}) التمثيلين المبيانيين للدالتين f و f^{-1} .

6. الحل

الدالة $x \rightarrow 2x-1$ متصلة و موجبة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

ومنه الدالة f متصلة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

لأن:

$$\left(\forall x \geq \frac{1}{2}\right) \left(\forall x' \geq \frac{1}{2}\right) \quad x < x' \Rightarrow 0 < 2x + 1 < 2x' + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1} < \sqrt{2x'+1}$$

$$\Rightarrow f(x) < f(x')$$

إذن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J .
لنحدد J :

$$J = f(I)$$

$$= f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right)$$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$= [0, +\infty[$$

لنحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من $J = [0, +\infty[$

$$\left(\forall x > 0\right) \left(\forall y > \frac{1}{2}\right)$$

لدينا :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

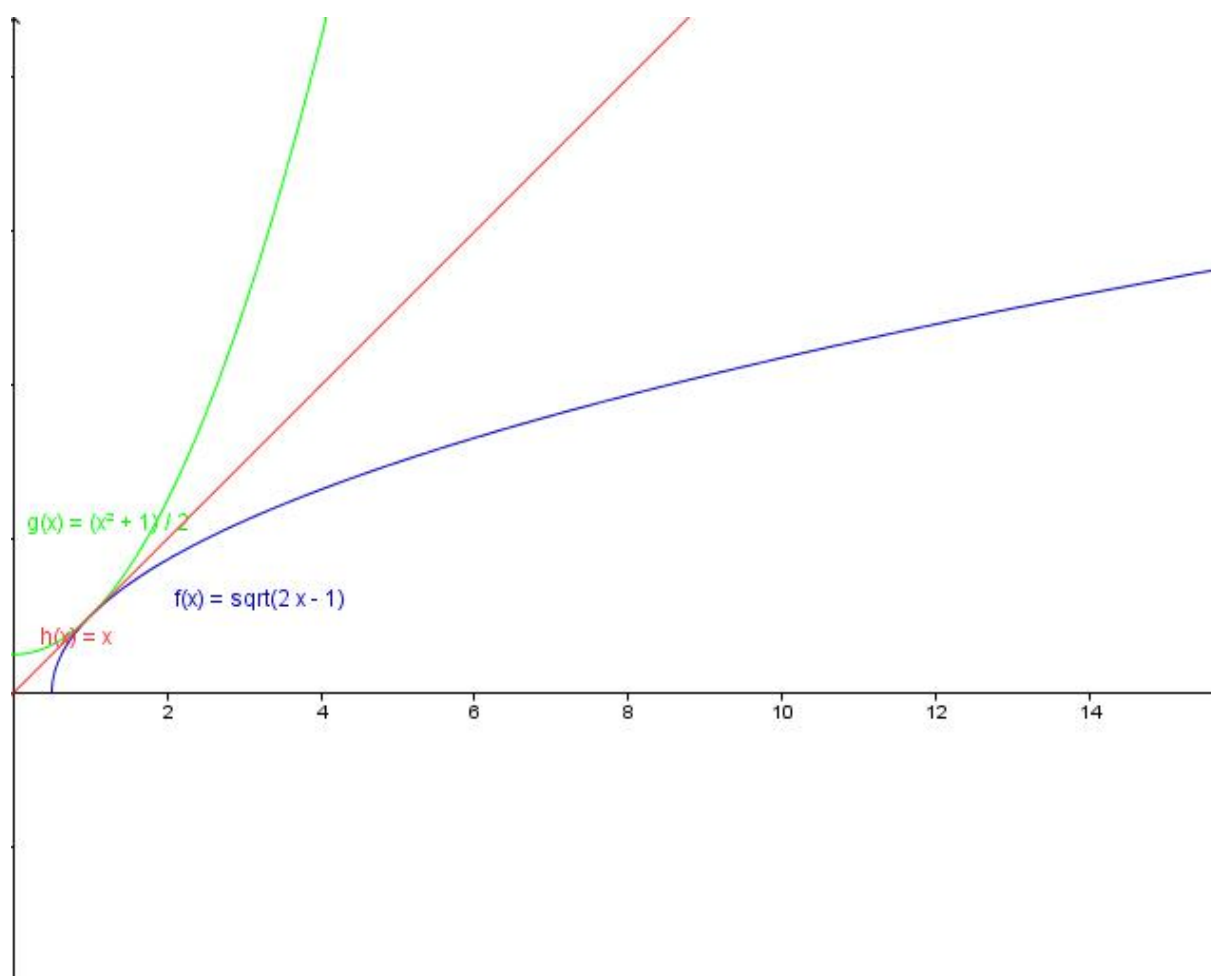
$$\Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x$$

$$\Leftrightarrow 2y-1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2+1}{2}$$

ومنه $(\forall x > 0) \quad f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2}$

إنشاء (f) و (f^{-1}) في نفس المعلم م م



الحصة رقم 9

VIII. دالة الجذر من الرتبة n

1. تمهيد

ليكن n من $\mathbb{N}^*$
الدالة f المعرفة بـ $f(x)=x^n$ متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$ نحو $[0, +\infty[$ (لأن $f(0)=0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)
إذن f تقبل دالة عكسية

2. تعريف

ليكن n من $\mathbb{N}^*$
الدالة العكسية للدالة f المعرفة بـ $f(x)=x^n$ على المجال $[0, +\infty[$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n و نرمز بالرمز $\sqrt[n]{x}$
العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x .

$$\text{ولدينا : } \begin{cases} \sqrt[n]{x} = y \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^n = x \\ y > 0 \end{cases}$$

3. نتائج

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$(\forall a > 0) : (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

الدالة $\sqrt[n]{x}$ تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$ ومنه:

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0) : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$$

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0) : \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a > b$$

4. العمليات على الجذور من الرتبة n

ليكن n و m عنصرين من $\mathbb{N}^*$ و a و b عنصرين من $\mathbb{R}^+$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ و } \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \text{ حيث } b > 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \text{ و } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$$

5. مركب دالة f و دالة الجذر من الرتبة n

لتكن f دالة موجبة على مجال I .

إذا كانت f دالة متصلة على I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \geq 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

مع x_0 يؤول إلى ∞ أو على اليمين أو على اليسار

6. تمرين : معادلات و متراجحات لا جذرية

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(E) : \sqrt[5]{3x-4} = 2$

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $(F) : \sqrt[6]{2x-3} < 2$

7. الحل

المعادلة (E) معرفة إذا و فقط إذا كان $3x-4 \geq 0$ أي $x \geq \frac{4}{3}$

$$\sqrt[5]{3x-4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 = 2^5 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 = 32 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\{12\}$
المتراجحة (F) معرفة إذا و فقط إذا كان $2x-3 \geq 0$ أي $x \geq \frac{3}{2}$

$$\sqrt[6]{2x-3} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < 2^6 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < 64 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{67}{2} \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{67}{2} \right[$$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (F) هي $S = \left[\frac{3}{2}, \frac{67}{2} \right[$.

الحصة رقم 10

IX. القوى الجذرية ($r \in \mathbb{Q}^*$) لعدد حقيقي موجب قطعاً

1. تعريف

نضع $r = \frac{p}{q}$ عددا جذريا حيث ($p \in \mathbb{Z}^*$) و ($q \in \mathbb{N}^*$) و x عددا حقيقيا موجبا قطعاً

القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r هو العدد المرموز له بالرمز x^r بحيث $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

2. مثال

لنكتب على شكل قوة أساسها العدد 5 العدد $A = \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[6]{5}$ لدينا:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[6]{5} \\ &= 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{6}} \\ &= 5^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} \\ &= 5^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

3. تمرين : مقارنة و تبسيط أعداد تحتوي على $\sqrt[n]{}$

قارن الأعداد : $a = \sqrt[4]{3}$ و $b = \sqrt[5]{4}$ و $c = \sqrt[10]{15}$

$$A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[3]{3}} \text{ بسط العدد}$$

4. الحل

المقارنة

لدينا $\text{ppmc}(4,5,10)=20$

$$a^{20} = (\sqrt[4]{3})^{20} = \left((\sqrt[4]{3})^4 \right)^5 = 3^5 = 243$$

$$b^{20} = (\sqrt[5]{4})^{20} = \left((\sqrt[5]{4})^5 \right)^4 = 4^4 = 256$$

$$c^{20} = (\sqrt[10]{15})^{20} = \left((\sqrt[10]{15})^{10} \right)^2 = 15^2 = 225$$

ومنه $c^{20} < a^{20} < b^{20}$

أي : $\sqrt[10]{15} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$

التبسيط

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^5}} \times \sqrt[3]{3^2} \times (\sqrt[5]{3^2})^3}{\sqrt[5]{3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[5]{3^6}}{\sqrt[5]{3}} \\ &= \sqrt[3]{3 \times 3^2} \times \sqrt[5]{3^5} \\ &= 3 \times 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

5. تمرين

حل في IR المعادلة : $(2x-1)^{\frac{2}{3}} = 16$

6. الحل

الكتابة $(2x-1)^r$ معرفة إذا كان $2x-1 > 0$ أي $x > \frac{1}{2}$

$$(2x-1)^{\frac{2}{3}} = 16 \Leftrightarrow \left((2x-1)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^3$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 64$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{65}{2}$$

X. سلسلة تمارين

تمرين تطبيقي 2

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 1; x \geq 0 \\ f(x) = \frac{1}{x-1}; x < 0 \end{array} \right. \quad \text{لتكن } f \text{ الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي :}$$

ملاحظة : قصور دالة

الصيغة $f_1(x) = x^2 + 1$ تسمى قصور الدالة f على المجال $[0, +\infty[$
الصيغة $f_2(x) = 1/(x+1)$ تسمى قصور الدالة f على المجال $]-\infty, 0[$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$$

هل الدالة f متصلة على اليسار في النقطة $x_0 = 0$ ؟

هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 0$ ؟

حل

حسب تعريف الدالة f لدينا $f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \text{ لدينا}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0) \text{ ومنه}$$

نستنتج إذن أن الدالة f غير متصلة على اليسار في النقطة $x_0=0$.
بما أن f غير متصلة على اليسار في النقطة $x_0=0$ فإنها غير متصلة في النقطة $x_0=0$.

تمرين تطبيقي 3

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x + a & ; x < 1 \\ f(x) = 2x - 3 & ; 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) = bx + 1 & ; x > 3 \end{cases}$$

حدد العددين a و b علما أن الدالة f متصلة على اليسار في النقطة 1 و على اليمين في 3.

الحل

الدالة f متصلة على اليسار في النقطة 1 ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} x + a = f(1) = 2 \times 1 - 3$$

$$\Leftrightarrow 1 + a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 3 ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} bx + 1 = f(3) = 2 \times 3 - 3$$

$$\Leftrightarrow 3b + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$$

الجزيرة