

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + 1 \end{cases} \quad \text{و } b_0 = 1 \text{ و } a_0 = 3$$

1- لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = a_n - b_n$

أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

ب- اكتب u_n بدلالة n ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

2- لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$

أ- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n \geq 2$

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} = \frac{2 - v_n}{n+1} + v_n$ ثم استنتج رتبة المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

ج- بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة وأن نهايتها ℓ موجبة قطعاً.

3- احسب كلا من a_n و b_n بدلالة u_n و v_n ، ثم احسب نهايتي (a_n) و (b_n)